

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА**

**А.С. ИВАНИКОВ, В.В. ИВАНОВ, Д.В. КИРЮШИН,
Ю.В. ЧЕРКАСОВА**

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Рязань 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

А.С. ИВАНИКОВ, В.В. ИВАНОВ, Д.В. КИРЮШИН,
Ю.В. ЧЕРКАСОВА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

*Рекомендовано Научно-методическим советом
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радио-
технический университет им. В.Ф. Уткина» в
качестве учебного пособия для студентов, обу-
чающихся по программам высшего образования
по направлениям подготовки инженерного про-
филя (уровни 3, 5; квалификации: бакалавр, спе-
циалист) и направления 38.03.02 (уровень 3; ква-
лификация бакалавр)*

Рязань 2022

УДК 533.1

Молекулярная физика. Лабораторный практикум: учеб. пособие / А.С. Иваников, В.В. Иванов, Д.В. Кирюшин, Ю.В. Черкасова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т им. В.Ф. Уткина. Рязань, 2022. 64 с.

Рассмотрены основы молекулярно-кинетической теории. Приведено подробное описание вывода основных соотношений в рамках данной теории. Дано описание трёх лабораторных работ, включающее в себя метод эксперимента, порядок выполнения работ и итоговые контрольные вопросы.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей, изучающих дисциплины «Физика» и «Научные основы инновационных технологий».

Табл. 4. Ил. 34. Библиогр.: 6 назв.

Молекулярно-кинетическая теория, распределение Максвелла, распределение Больцмана, явления переноса, метод Стокса, метод Пуазёйля

Рекомендовано научно-методическим советом Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты: Трубицын А.А – д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры ПЭЛ ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина».

Авачева Т.Г. – к.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой математики, физики и медицинской информатики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова» Министерства здравоохранения Российской Федерации.

И в а н и к о в Александр Сергеевич
И в а н о в Владимир Васильевич
К и р ю ш и н Дмитрий Вячеславович
Ч е р к а с о в а Юлия Вадимовна

Молекулярная физика. Лабораторный практикум

Редактор М.Е. Цветкова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 16.05.22. Формат бумаги 60х84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,0.

Тираж 200 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

© Рязанский государственный
радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина, 2022

1. Элементы теории. Молекулярная физика

1.1. Введение

Молекулярная физика или **молекулярно-кинетическая теория** (МКТ) – раздел физики, в котором изучаются свойства макросистем и процессы, происходящие в них.

Макросистема – система, состоящая из очень большого числа частиц, например атомов и/или молекул.

Молекулярная физика изучает зависимость свойств макросистем от их внутреннего строения, сил взаимодействия между частицами и характера движения этих частиц.

В основе МКТ лежат следующие положения:

- 1) все тела состоят из молекул;
- 2) молекулы находятся в непрерывном хаотическом тепловом движении;
- 3) молекулы взаимодействуют между собой посредством сил взаимного притяжения и отталкивания.

МКТ объясняет свойства тел, наблюдаемые опытным путём, как результат суммарного действия всех молекул. То есть в данном разделе физики на основе анализа микропараметров макросистем (масса, скорость, импульс, энергия и концентрация молекул) получают информацию о макропараметрах (давление, температура, плотность и т.п.). Для этого МКТ использует законы теории вероятности и математической статистики.

1.2. Вывод основного уравнения МКТ идеального газа

В МКТ часто пользуются **моделью идеального газа**. Газ можно считать идеальным, если:

- 1) размер молекул газа очень мал по сравнению с расстояниями между ними;
- 2) силы притяжения между молекулами пренебрежительно малы;
- 3) столкновения молекул между собой и с окружающими объектами являются абсолютно упругими.

Основываясь на этой модели, молекулы газа можно рассматривать как свободно движущиеся материальные точки, не взаимодействующие друг с другом на расстоянии, и как упругие шары непосредственно в момент их соударений. Реальный газ можно считать идеальным, если давле-

ние газа невелико, а абсолютная температура достаточно высока. Например, воздух при нормальных условиях можно описывать данной моделью.

Получим соотношение между давлением идеального газа, кинетической энергией молекул и их концентрацией.

Первопричиной возникновения давления со стороны газа на любую поверхность являются соударения с поверхностью молекул этого газа. В общем случае движение молекул хаотично, все направления движения

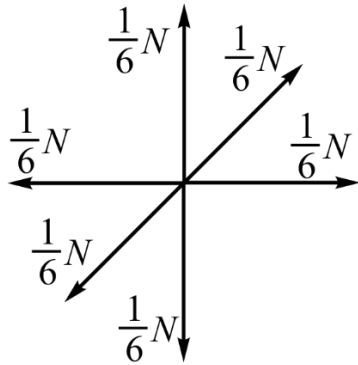


Рис. 1

равновероятны и их скорости различны по величине. Для облегчения анализа упростим ситуацию и введём следующую физическую модель.

Будем считать, что молекулы движутся только вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений с одинаковыми по величине скоростями. Тогда из N молекул газа в любой момент времени вдоль каждого из трёх направлений будет двигаться $N/3$ молекул. Все направления

движения молекул равновероятны. Следовательно, половина из них будет двигаться в одну сторону, половина – в другую. Таким образом, в одну сторону будет двигаться $N/6$ молекул (рис. 1).

Давление p , оказываемое молекулами на участок поверхности площадью S , можно определить, как

$$p = \frac{F_n}{S}, \quad (1)$$

где F_n – проекция силы давления газа на направление вектора нормали к поверхности.

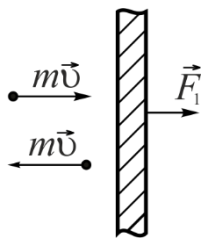


Рис. 2

По второму закону Ньютона, сила, действующая на одну молекулу со стороны стенки, будет равна скорости изменения импульса этой молекулы:

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}, \quad (2)$$

где m – масса молекулы, v – её скорость, Δt – время взаимодействия с поверхностью (время изменения импульса).

Пусть поверхность перпендикулярна к одному из выбранных нами направлений, то изменение импульса молекулы, испытавшей абсолютно упругое соударение (рис. 2), будет равно

$$\Delta(mv) = mv - (-mv) = 2mv. \quad (3)$$

Если за время Δt о стенку ударяется N_0 молекул, то с учётом (2) и (3) получаем результирующую проекцию силы:

$$F_n = \frac{2m\upsilon}{\Delta t} N_0. \quad (4)$$

Выделим вблизи рассматриваемой поверхности небольшую цилиндрическую область (рис. 3). За время Δt до элемента стенки площадью S долетят все молекулы, движущиеся к стенке, заключённые в объёме Sl . Число молекул в этом объёме

$$N' = nSl = nS\upsilon\Delta t,$$

где n – концентрация молекул газа.

К стенке движется $1/6$ часть этих молекул, поэтому число молекул, ударившихся о стенку за время Δt , определяется по формуле

$$N_0 = \frac{1}{6} nS\upsilon\Delta t. \quad (5)$$

Часть этих молекул на своём пути к стенке столкнётся с другими молекулами, вследствие чего изменит направление движения, не достигнув S . Однако соударения не нарушают хаотического характера движения молекул: переход некоторого количества молекул из группы, движущейся по направлению к стенке, в группы, движущиеся в других направлениях, сопровождается одновременным переходом такого же числа молекул из других групп в группу, движущуюся по направлению к стенке. Поэтому при вычислении количества молекул, долетающих до стенки, соударения молекул друг с другом можно не принимать во внимание.

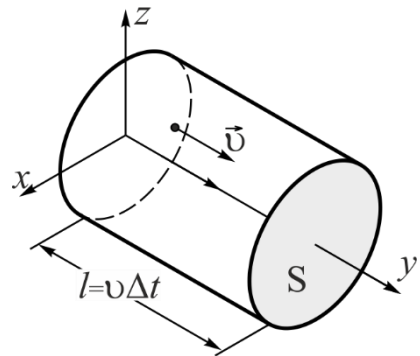


Рис. 3

Подставив (5) в (4), получим:

$$F_n = \frac{1}{3} nm\upsilon^2 S.$$

Тогда выражение (1) для давления, оказываемого молекулами на стенки сосуда, можно переписать в виде

$$p = \frac{1}{3} nm\upsilon^2.$$

Числитель и знаменатель правой части последнего равенства умножим на два:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Учитывая, что $m\bar{v}^2/2$ представляет собой кинетическую энергию E поступательного движения одной молекулы, получаем:

$$p = \frac{2}{3}nE.$$

Молекулы имеют разные по величине и направлению скорости. Поэтому имеет смысл говорить о средней кинетической энергии $\langle E \rangle$ вне зависимости от конкретного вида распределения молекул по скоростям. Таким образом, окончательное выражение, определяющее связь давления (макропараметра системы) с концентрацией молекул и их средней кинетической энергией теплового движения (микропараметрами), имеет вид

$$p = \frac{2}{3}n\langle E \rangle. \quad (6)$$

Это уравнение называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа**. Оно связывает макропараметр системы, именуемый давлением идеального газа, с такими его микропараметрами, как концентрация молекул и их средняя кинетическая энергия теплового движения.

1.3. Связь термодинамической температуры и средней кинетической энергии молекул

Запишем уравнение Клайперона – Менделеева:

$$pV = \nu RT, \quad (7)$$

где V – объём газа, ν – количество вещества, $R=8,31$ Дж/(моль·К) – газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Количество вещества равно отношению количества молекул газа N к числу Авогадро N_A :

$$\nu = N/N_A.$$

Подставим это в формулу (7), перегруппируем физические величины и выразим давление:

$$p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T.$$

Первая дробь представляет собой концентрацию молекул n . Вторая дробь равна постоянной Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К). Тогда основное уравнение состояния газа принимает вид

$$p = nkT. \quad (8)$$

Из сравнения выражений (6) и (8) для одноатомного идеального газа получаем:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (9)$$

Формула (9) определяет физический смысл понятия **абсолютной температуры** и характеризует её как **меру средней кинетической энергии теплового движения молекул**. Это соотношение также задаёт связь между микропараметрами отдельных молекул (кинетической энергией теплового движения) и макропараметром газа (абсолютной температурой).

В случае многоатомного газа формула (9) принимает вид

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (10)$$

где i – число степеней свободы молекулы.

В общем случае **числом степеней свободы** механической системы называется количество независимых координат, с помощью которых может быть описано состояние системы. Применительно к соотношению (10) число степеней свободы равно числу независимых возможных движений молекул. В частности, положение материальной точки, свободно движущейся в пространстве, определяется тремя координатами: x , y , z . Следовательно, свободная материальная точка имеет 3 **поступательные степени свободы**. Положение абсолютно твёрдого тела можно определить с помощью трёх координат x , y , z его центра масс и углов α , β , γ , указывающих ориентацию тела в пространстве. Оно способно двигаться поступательно по трём взаимно перпендикулярным направлениям и вращаться относительно трёх взаимно перпендикулярных осей. Следовательно, абсолютно твёрдое тело может иметь до 6 степеней свободы (3 **поступательных** и 3 **вращательных**). Для определения положения в пространстве тела, различные части которого могут смещаться друг относительно друга, вводятся **степени свободы колебательного движения**.

Молекулу одноатомного газа можно считать материальной точкой, и она имеет 3 степени свободы поступательного движения. Молекула двухатомного газа в первом приближении представляет собой два атома, жёстко связанных между собой (рис. 4).

Кроме трёх степеней свободы поступательного движения, которое характеризуется скоростью центра масс C , такая молекула имеет ещё 2 степени

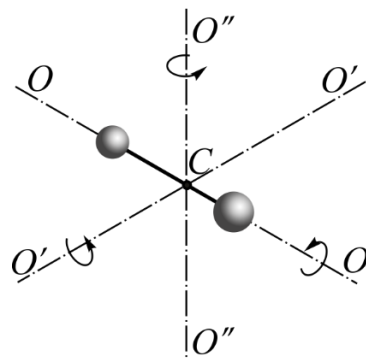


Рис. 4

свободы вращательного движения относительно осей $O'O'$ и $O''O''$. Вращение относительно третьей оси OO не вносит вклада в энергию молекулы, так как её момент инерции относительно этой оси равен нулю. Таким образом, двухатомная молекула (связь между атомами жёсткая) имеет 5 степеней свободы.

Если в многоатомной молекуле атомы образуют линейную цепочку и связь между атомами жёсткая, то такая молекула имеет также 5 степеней свободы. Молекулы, состоящие из трёх или более атомов, не расположенных на одной прямой, с жёсткой связью между атомами имеют 6 степеней свободы.

Модель молекулы в виде системы жёстко связанных между собой атомов является весьма приближенной. Во многих случаях необходимо принимать во внимание относительные смещения атомов в молекуле, т.е. вводить в рассмотрение колебательные степени свободы. Колебательная степень свободы должна обладать вдвое большей энергетической ёмкостью по сравнению с поступательной и вращательной. Это объясняется тем, что поступательное и вращательное движение молекулы связано с наличием только кинетической энергии, в то время как колебательное движение связано с наличием и кинетической, и потенциальной энергии. Поэтому на каждую колебательную степень свободы должна приходиться в среднем энергия, равная kT ($kT/2$ – в виде кинетической энергии и $kT/2$ – в виде потенциальной). Поэтому в общем виде

$$i = i_n + i_{вр} + 2i_{кол}. \quad (11)$$

1.4. Распределение Максвелла по скоростям для молекул идеального газа

Формула (6) включает в себя значение средней кинетической энергии теплового движения молекул идеального газа. В реальности тепловые скорости молекул газа различны и для идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, подчинены определённому закону распределения. Такой закон был теоретически обоснован в 1859 году Джеймсом Клерком Максвеллом.

При хаотическом движении скорости молекул различны как по модулю, так и по направлению. Все направления движения молекул равновероятны, следовательно, распределение молекул по направлениям будет равномерным. Иначе дело обстоит с модулями их скоростей.

Введём воображаемое пространство скоростей по аналогии с декартовой системой координат (рис. 5). Только по ортогональным осям вместо

координат x, y, z отложим компоненты скоростей v_x, v_y, v_z . Тогда каждой молекуле в этом пространстве будет соответствовать некая «скоростная точка» с «координатами» (v_x, v_y, v_z) . Выделим в этом пространстве элементарный объем $dV = dv_x dv_y dv_z$.

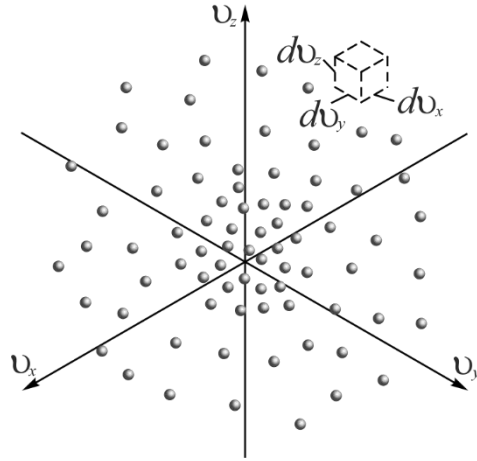


Рис. 5

Газ находится в равновесном состоянии. Следовательно, количество «скоростных точек» в этом пространстве остаётся неизменным во времени. Пространство скоростей изотропно. Следовательно, функции плотности вероятности для всех направлений одинаковы.

Функции вероятности по «скоростным» осям запишем в виде:

$$dP(v_x) = \varphi(v_x)dv_x, \quad dP(v_y) = \varphi(v_y)dv_y, \quad dP(v_z) = \varphi(v_z)dv_z, \quad (12)$$

где $\varphi(v_x), \varphi(v_y), \varphi(v_z)$ – плотности вероятностей по соответствующим осям.

Максвелл предположил, что распределения скоростей по направлениям статистически независимы, то есть проекции скоростей v_x, v_y , и v_z не зависят друг от друга. Тогда вероятность нахождения «скоростной точки» в объёме dV равна произведению вероятностей (12) независимых событий

$$dP(v) = dP(v_x)dP(v_y)dP(v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_xdv_ydv_z$$

или

$$dP(v) = f(v)dv_xdv_ydv_z, \quad (13)$$

где $f(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$ – объёмная плотность вероятности в пространстве скоростей.

Прологарифмируем $f(v)$:

$$\ln f(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z).$$

Затем продифференцируем по v_x :

$$\frac{\partial}{\partial v_x} [\ln f(v)] = \frac{\partial}{\partial v_x} [\ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z)]$$

и получим:

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}. \quad (14)$$

Полная скорость молекулы определяется как $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{v_x}{v}. \quad (15)$$

С учётом (15) соотношение (14) можно представить в виде

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{1}{v_x} \frac{\phi'(v_x)}{\phi(v_x)}. \quad (16)$$

Правая часть полученного выражения не зависит от v_y и v_z . Однако все проекции скоростей равноправны, и, следовательно, выражение (16) также не должно зависеть от v_x . То есть оно должно равняться некоторой константе:

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = -\alpha. \quad (17)$$

Тогда из (16) и (17) получаем однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\phi'(v_x) + \alpha v_x \phi(v_x) = 0,$$

решением которого является функция

$$\phi(v_x) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right), \quad (18)$$

где A – некоторая постоянная.

Постоянную A определим из **условия нормировки**: вероятность обнаружить молекулу со скоростью $v_x \in (-\infty; +\infty)$ равна единице, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v_x) dv_x = 1.$$

Подставив функцию (18), получим:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) dv_x = A \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}.$$

Соотношение (18) принимает вид

$$\phi(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right). \quad (19)$$

Постоянную α найдём из кинетического определения температуры как меры средней кинетической энергии теплового движения молекул, определив предварительно среднеквадратичную тепловую скорость молекул $\langle v^2 \rangle$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{(\alpha/2)^3}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Аналогично

$$\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{\alpha}.$$

Средняя кинетическая энергия

$$\langle E \rangle = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{3m}{2\alpha}.$$

Подставляем полученное выражение в (9), выражаем α :

$$\frac{3m}{2\alpha} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \alpha = \frac{m}{kT}.$$

И формула (19) принимает вид

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right). \quad (20)$$

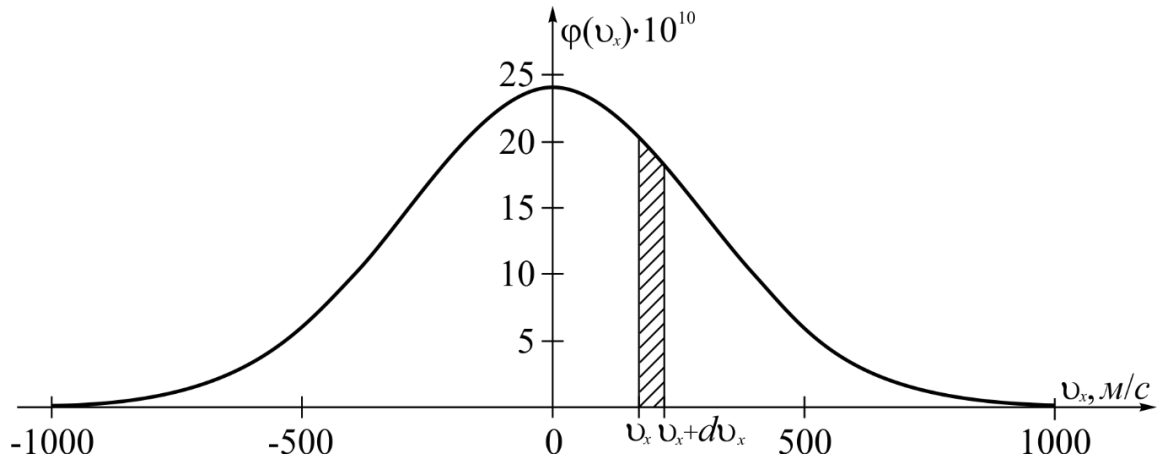


Рис. 6

График функции $\varphi(v_x)$ для молекул азота N_2 при температуре 300 K представлен на рис. 6. Он совпадает с гауссовой кривой погрешностей. Выделим на графике некоторый диапазон скоростей от v_x до $v_x + dv_x$. Тогда площадь заштрихованной области под кривой $\varphi(v_x)$ равна вероятности того, что скорости молекул лежат в диапазоне скоростей v_x до $v_x + dv_x$.

Аналогичные выражения записываем для функций $\varphi(v_y)$ и $\varphi(v_z)$. Перемножая эти функции, находим соотношение для объёмной плотности вероятности:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (21)$$

Определим функцию **распределения вероятности по модулям скоростей** $F(v)$. Она представляет собой дифференциал функции вероятности по модулю скорости

$$F(v) = \frac{dP(v)}{dv}. \quad (22)$$

Допустим, что в системе находится N молекул. Причём их количество достаточно велико. В пространстве скоростей «скоростные точки»

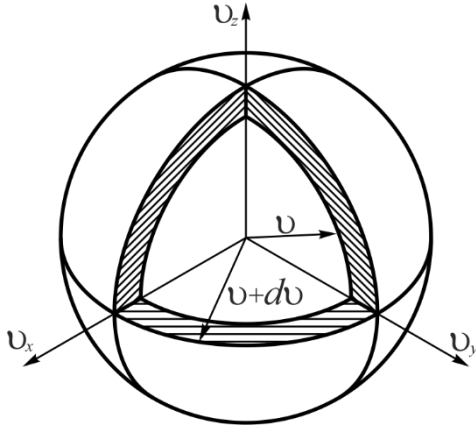


Рис. 7

молекул, имеющих скорости в интервале v до $v + dv$, лежат в пределах сферического слоя толщиной dv (рис. 7).

Из-за малости dv объём такого слоя можно определить как произведение площади поверхности сферы и её толщины $dV = 4\pi v^2 dv$. Вероятность того, что выбранная молекула имеет модуль скорости в выбранном интервале v до $v + dv$, задаётся произведением объём-

ной плотности вероятности $f(v)$ и объёма dV . Тогда получаем:

$$dP(v) = f(v)4\pi v^2 dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (23)$$

И с учётом (22) **функция распределения вероятности по модулям скоростей** принимает вид

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (24)$$

Эта функция носит название **функции распределения Максвелла по модулю скорости**. Умножив её на общее число частиц N и на интервал скоростей dv , мы получим число молекул dN_v , модули скоростей которых лежат в интервале v до $v + dv$:

$$dN_v = NF(v)dv = N \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (25)$$

Границы применимости распределения Максвелла:

- система состоит из большого числа частиц;
- система находится в равновесном состоянии;
- система изотропна;
- система является классической, то есть она не релятивистская и не квантовая (взаимодействие частиц допускается, но только зависящее от

относительного положения частиц).

График функции (24) для молекул азота N_2 при температурах 300, 400 и 500 K представлен на рис. 8. Зависимости имеют чётко выраженные максимумы, положение которых с ростом абсолютной температуры смещается в сторону больших скоростей, а их величина, напротив, уменьшается.

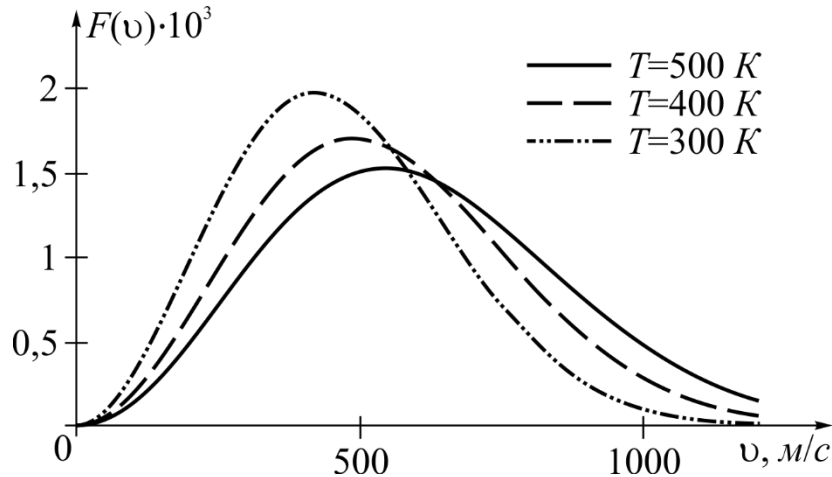


Рис. 8

1.5. Следствия из распределения Максвелла по модулю скорости

1.5.1. Наиболее вероятная скорость частиц

Скорость, соответствующая максимуму функции распределения вероятности по модулям скоростей (24), называется **наиболее вероятной**. Определим соотношение для неё. Для этого продифференцируем функцию $F(v)$ по модулю скорости и, приравняв полученную производную к нулю, определим экстремум.

С учётом формулы (24)

$$\frac{\partial F(v)}{\partial v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \right].$$

Дифференцируем произведение двух функций и приравниваем результат к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(v)}{\partial v} &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[2v \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) + v^2 \left(-\frac{2mv}{2kT} \right) \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \right] = \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \left[2v - \frac{mv^3}{kT} \right] = 0. \end{aligned}$$

Полученное соотношение равно нулю только в случае, если равна нулю разность в последней скобке

$$2v - \frac{mv^3}{kT} = 0.$$

Выражая скорость и отбрасывая вариант решения с $v = 0$, получаем формулу для расчёта **наиболее вероятной скорости частиц**

$$v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (26)$$

Учитывая, что $k = R/N_A$ ($R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро) и $m = M/N_A$ (M – молярная масса), формулу (26) можно переписать в виде

$$v_g = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (24), получаем выражения для максимума функции распределения Максвелла по модулю скорости:

$$F_{\max} = F(v_g) = 4\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp(-1) = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \quad (28)$$

или

$$F_{\max} = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}. \quad (29)$$

Из соотношений (27) и (29) следует, что для молекул с неизменной массой с ростом абсолютной температуры значение вероятной скорости возрастает пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры, а максимальное значение функции распределения Максвелла снижается обратно пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры

$$v_g \sim \sqrt{T}, \quad F_{\max} \sim 1/\sqrt{T}.$$

Часто на практике реальные значения скоростей заменяют значения, нормированные на вероятную скорость $u = v/v_g$. Тогда распределение Максвелла (24) можно переписать в виде

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2), \quad (30)$$

а выражение (25) для числа молекул dN_u , относительные скорости которых лежат в интервале u до $u+du$,

$$dN_u = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) du. \quad (31)$$

1.5.2. Средняя арифметическая скорость частиц

Среднее значение модуля скорости определяется как отношение суммы модулей скоростей всех молекул к общему числу молекул

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} v dN_v}{\int_0^{\infty} dN_v}. \quad (32)$$

Интеграл в знаменателе равен N . Подставим соотношение (25) в числитель формулы (32) и проведём преобразования:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} N \cdot 4\pi v^3 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Стандартный интеграл $\int_0^{\infty} x^3 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} a^{-2}$. Тогда

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

То есть **средняя арифметическая скорость частиц** равна

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \text{или} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (33)$$

1.5.3. Средняя квадратичная скорость частиц

Найдём среднее значение квадрата скорости как отношение суммы квадратов скоростей всех молекул к общему числу молекул:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} v^2 dN_v}{\int_0^{\infty} dN_v}. \quad (34)$$

Интеграл в знаменателе равен N . Подставим соотношение (25) в числитель формулы (34) и проведём преобразования:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} N \cdot 4\pi v^4 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Стандартный интеграл $\int_0^{\infty} x^4 \exp(-ax^2) dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-\frac{5}{2}}$. Тогда

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3kT}{m}.$$

Квадратный корень из полученного даёт **среднюю квадратичную скорость частиц**

$$v_{cp.kv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{или} \quad v_{cp.kv} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (35)$$

1.5.4. Распределение по кинетическим энергиям

Запишем выражение для кинетической энергии молекулы и её дифференциала:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad dE_k = mv dv.$$

Выразим скорость молекулы и определим её дифференциал:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}, \quad dv = \frac{dE_k}{\sqrt{2mE_k}}.$$

С учётом полученных соотношений преобразуем функцию вероятности (23) к виду:

$$dP(E_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E_k} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) dE_k.$$

Тогда **распределение Максвелла по кинетическим энергиям**

$$F(E_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E_k} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right). \quad (36)$$

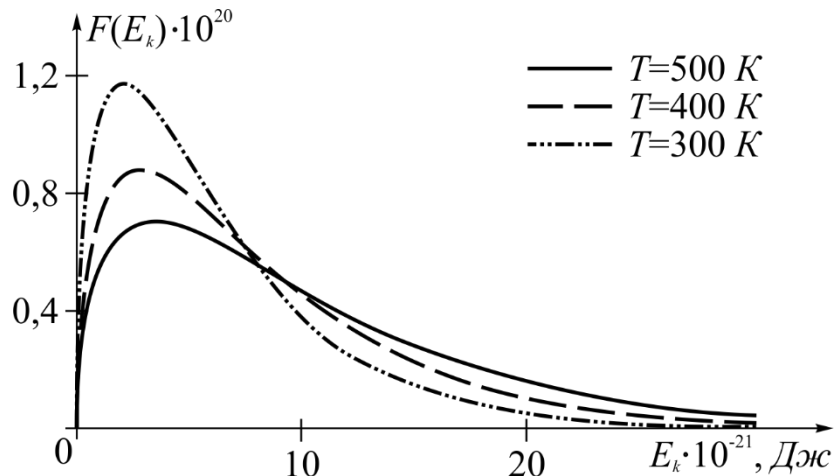


Рис. 9

График функции (36) для молекул азота N_2 при температурах 300, 400 и 500 K представлен на рис. 9. Зависимости $F(E_k)$ подобно распределению Максвелла по модулям скоростей $F(v)$ имеют чётко выраженные максимумы, положение которых с ростом абсолютной температуры смещается в сторону больших энергий, а их величина снижается.

Продифференцируем функцию (36) по модулю скорости и, приравняв полученную производную к нулю, определим значение экстремума:

$$\frac{\partial F(E_k)}{\partial v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{E_k} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) \right] = 0.$$

Дифференцируем произведение функций и результат приравняем к нулю:

$$\frac{\partial F(E_k)}{\partial v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{E_k}} - \frac{\sqrt{E_k}}{kT} \right] \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) = 0.$$

Уравнение обращается в нуль в случае, если нулю равна разность

$$\frac{1}{2\sqrt{E_k}} - \frac{\sqrt{E_k}}{kT} = 0.$$

Выражая из полученного соотношения энергию, находим **наиболее вероятную кинетическую энергию**:

$$(E_k)_e = \frac{1}{2} kT. \quad (37)$$

Значение **средней кинетической энергии поступательного движения молекул** определяется как

$$\langle E_k \rangle = \int_0^{\infty} E_k F(E_k) dE_k. \quad (38)$$

Подставим формулу (36) в (38):

$$\langle E_k \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} E_k^{3/2} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) dE_k.$$

Стандартный интеграл $\int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-ax) dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} a^{-5/2}$. Тогда

$$\langle E_k \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{kT}\right)^{-5/2} = \frac{3}{2} kT.$$

То есть **средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул** равна

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (39)$$

Формула (39) полностью идентична соотношению (9), полученному на основе сравнения эмпирического уравнения Клайперона – Менделеева с основным уравнением МКТ, выведенным на основе статистического метода анализа.

1.6. Экспериментальное подтверждение реальности существования распределения Максвелла

1.6.1. Опыт Отто Штерна (1920)

В основу эксперимента была положена следующая идея [1].

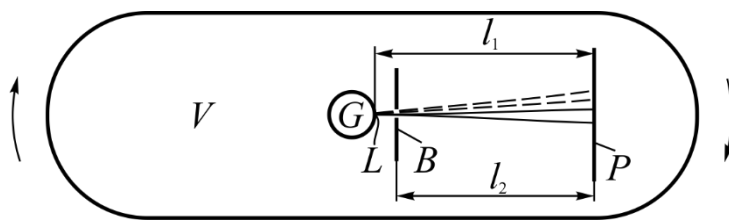


Рис. 10

Допустим, имеется сосуд V , в котором поддерживается высокий вакуум (рис. 10). В нём находится ёмкость G меньшего размера, заполненная газом, в

стенке которой просверлено тонкое отверстие L . Через это отверстие молекулы вылетают в пустое пространство V со скоростью, соответствующей температуре газа. Диафрагма B формирует достаточно тонкий конусообразный молекулярный поток. Молекулы, пролетая пространство между диафрагмой B и собирающей пластиной P , ударяясь о последнюю, конденсируются на ней, создавая круглое пятно¹.

Представим, что система быстро вращается относительно оси, проходящей через отверстие L перпендикулярно к молекулярному потоку. В этом случае пятно на собирающей пластине смещается в направлении, противоположном вращению, так как молекулам требуется определённое время, чтобы, пройдя через диафрагму, добраться до собирающей пластины P . За это время пластина вследствие поворота перемещается на некоторое расстояние s . Оценим это расстояние.

Если l_2 – расстояние между B и P (см. рис. 10), а v – скорость молекулы, то время, затрачиваемое на пролёт, равно

$$\tau = \frac{l_2}{v}. \quad (40)$$

За это время точки, лежащие на собирающей пластине, вращающейся с частотой ν по окружности радиусом l_1 , смещаются на расстояние

¹ Такие молекулярные пучки впервые были созданы Луи Дюнуайе. (Louis Dunoyer, Le Radium 8, 142, 1911)

$$s = 2\pi l_1 v \tau. \quad (41)$$

Из (40) и (41) получаем:

$$s = \frac{2\pi v}{v} l_1 l_2. \quad (42)$$

Пятно на собирающей пластине будет сдвигаться на эту величину во время вращения, или, точнее, поскольку согласно Максвеллу молекулы имеют различные скорости, оно будет растянуто в полосу, интенсивность которой в различных точках является прямой мерой распространённости (вероятности) значения молекулярной скорости, соответствующей рассматриваемой точке.

Если диафрагму B расположить достаточно близко к отверстию L ($\Delta l = l_1 - l_2 \ll l_1$), то $l_2 \approx l_1 = l$ и формула (42) примет вид

$$s = \frac{2\pi v l^2}{v}. \quad (43)$$

Пусть $v = 50 \text{ Гц}$, $l = 10 \text{ см}$ и $v = 500 \text{ м/с}$. Тогда смещение s получается равным примерно 6 мм, что является достаточно большим значением, которое реально измерить.

Схема экспериментальной установки Штерна представлена на рис. 11. Атомарный источник, ограничительные диафрагмы и собирающие пластины устанавливались на раме R . Эта рама находилась на оси A , которая проходила через дно стационарного, постоянно откачиваемого резервуара и была соединена своим выступающим концом с осью двигателя. Атомарным источником L был не сосуд, наполненный газом, а посеребрённая платиновая проволока. Через неё пропусклся электрический ток такой величины, что она разогревалась до температуры выше температуры плавления серебра и испаряющиеся атомы серебра выпускались во всех направлениях. Далее часть атомов проходила через две пары последовательно расположенных диафрагм в двух диаметрально противоположных направлениях. Щели S_1 и S_2 выделяли два ленточных потока атомов (рис. 11 и 12). Атомы падали на собирающие пластины P , прикреплённые к концу рамы R , и образовывали серебряные линии. В состоянии покоя эти линии совпадали с линиями щелей. Во время вращения рамки серебряные линии на пластинах смещались в ту или иную сторону в зависимости от направления вращения.

Использование серебра для создания атомарного пучка давало возможность проведения эксперимента при комнатной температуре, поскольку атомы серебра, ударяясь о поверхность при комнатной темпера-

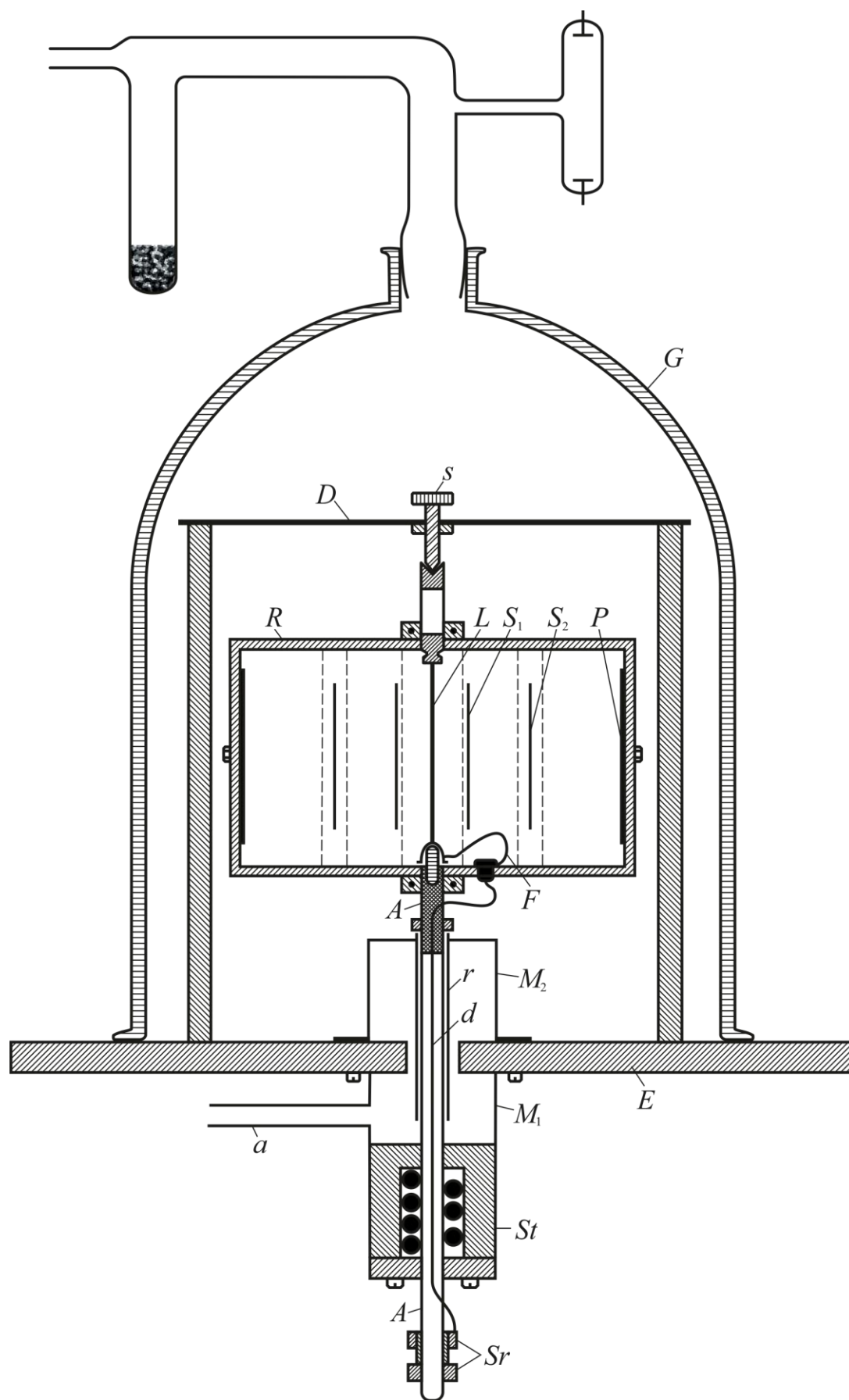


Рис. 11

туре, конденсировались там при первом ударе².

Платиновая проволока L имела длину около 6 см и диаметр 0,4 мм. Толщина серебряного покрытия составляла примерно 0,02 мм. Верхний конец проволоки зажимался небольшим зажимным винтом, прикрепленным к раме R . Нижний был впаян в просверленный латунный блок, отверстие которого скользило по стеклянному стержню, зацементированному в рамку. Латунный блок прижимался листовой пружиной F , изолированной на раме. Такая конструкция обеспечивала надёжное натяжение платиновой проволоки в холодном и в нагретом состояниях.

Чтобы источник излучения не менял своего положения даже при вращении, с обеих сторон проволоки L на расстоянии 8 мм фиксировались щели S_1 длиной 4 см и шириной 0,2 мм, изображение которых передавалось через щели S_2 (дли-

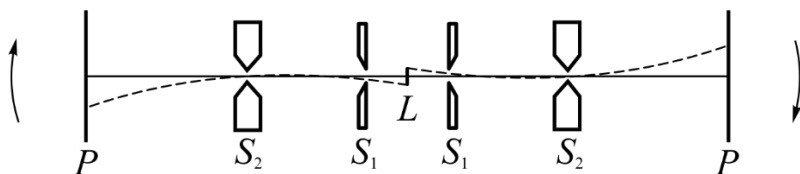


Рис. 12

ной 4 см, шириной 0,2 мм) на собирающие пластины P . Если бы проволока сместилась, то изображение на собирающей пластине не появилось бы, потому что при трансляции через щель S_1 оно попадало бы не в щель S_2 , а рядом с ней. Кроме того, поскольку при повороте рамки атомы серебра, достигающие собирающей пластины P , реально стартуют не точно из центра проволоки, а, скорее, немного со стороны (рис. 12), то центральная часть проволоки L длиной около 3,5 см была раскатана до ширины 0,6 мм.

Собирающие пластины были изготовлены из полированной латуни. Атомы серебра, попавшие на них, образовали коричневатую линию шириной около 0,4 мм. Положение её центра определялось с помощью 0,5 мм шкалы, вырезанной на пластинах, с точностью примерно от 1/10 до 1/20 мм.

Рама R была установлена на оси A из стальных труб с внешним диаметром 6 мм. Ток подводился к платиновому проводу L через два контактных кольца Sr . От верхнего кольца, изолированного на оси, ток проходил по изолированному проводу d через внутреннюю часть оси к пружине F и далее — к нижнему концу L , от нижнего контактного кольца ток шёл прямо через ось и раму к верхнему концу L .

² М. Knudsen, Ann. d. Phys. (4) 50, 472, 1916. В этой работе в качестве источника атомов применялась посеребрённая платиновая проволока, и атомы, испаряемые с её поверхности, осаждались на мишени, температура которой равнялась комнатной.

Вакуумное пространство, в котором находилась рама, состояло из колпака G высотой 35 см и внутренним диаметром 24 см, который был притёрт на квадратной железной пластине E толщиной 1 см с длиной стороны 35 см. Для уплотнения использовалась смазка Рамсея³. Стеклоанная трубка шириной около 2 см вела от горлышка колокола к сосуду с кокосовым углём, а оттуда – трубка шириной 1 см к конденсатному насосу⁴. На железную пластину E был навинчен штатив D , на котором находился регулируемый латунный винт s со стальным наконечником, служивший упором для верхнего конца оси.

Самой сложной частью устройства был герметичный проход оси в вакуум, который должен был откачиваться до уровня предварительного вакуума. Сальник St впаивался в латунную трубку M_1 шириной 4 см, прикрученную к нижней стороне железной пластины E , и в её полость вдавливался смазанный асбестовый шнур. Кроме того, к нижней части сальника примыкала ёмкость, заполненная смазкой. От латунной трубки M_1 трубка a вела к форвакуумному насосу (насосу Геде). Латунная трубка M_2 , находящаяся на верхней стороне железной пластины E , была закрыта сверху латунной пластиной, на которой находилась латунная трубка r , плотно охватывающая ось A , но без непосредственного контакта между ними. В пространстве, образованном M_1 и M_2 , поддерживался форвакуум от 10^{-2} до 10^{-3} мм, в основной камере G – на уровне примерно 10^{-4} мм. Вакуум контролировали с помощью трубки Гейслера.

Опорная плита E была жёстко закреплена на деревянной раме, к которой был привинчен небольшой двигатель. Ось двигателя была соединена с нижним концом оси A коротким отрезком вакуумного шланга. Другой конец оси двигателя был соединён гибким валом со счётчиком срабатываний.

Экспериментальная часть включала в себя следующие этапы. Сначала в течение нескольких часов путём сорбционной откачки получали требуемый вакуум (порядка 0,001 мм). Для этого предварительно нагретый кокосовый уголь последовательно охлаждали жидким воздухом (или твёрдым диоксидом углерода) и эфиром. Затем платиновую проволоку нагревали до температуры, близкой к температуре плавления серебра, включали двигатель, доводили его до желаемого числа оборотов и, наконец, платиновую проволоку нагревали током порядка 5 – 6 ампер до температуры выше плавления серебра. Пока серебро испарялось, что заняло

³ Смазка Рамсея (Ramsayfett) – смазочный материал с очень низкой упругостью паров для глубоковакуумных систем, состоящий из смеси парафина, каучука и воска

⁴ Насос фирмы Hanff&Buest, Берлин

всего несколько минут, постоянно контролировали вакуум и количество оборотов. Число оборотов в минуту в большинстве тестов было 1500, т.е. $\nu = 25$ оборотов в секунду. Полученные таким образом серебряные линии на собирающих пластинах были более слабыми и размытыми, чем линии, полученные без вращения, и они были смещены относительно неподвижных примерно на 0,4 мм. Для повышения точности измерения были определены расстояния между центрами серебряных линий, полученными в различных испытаниях с одинаковым числом оборотов, но с разными направлениями вращения. Результат лежал в диапазоне от 0,7 до 0,8 мм⁵. Таким образом, отклонение s в одном направлении составило величину от 0,35 до 0,40 мм.

Выразив из формулы (42) скорость

$$v = \frac{2\pi\nu}{s} l_1 l_2 \quad (44)$$

и подставив в неё полученные значения, для атомов серебра был получен диапазон максимальных скоростей от 560 до 640 м/с.

Если взять за основу точку плавления серебра (961°C), то согласно газовой теории средняя арифметическая скорость (33) должна составлять 534 м/с. Однако реально расплавленное серебро сжимается в капли, вследствие чего части платиновой проволоки, освобождённые от серебра, приобретают более высокую температуру из-за своего более высокого сопротивления. По результатам измерения яркости свечения температура составляла порядка 1200 °C, что соответствует скорости 584 м/с. И это уже неплохо согласуется с полученными данными.

В работе также была проведена оценка наиболее вероятной скорости атомов серебра (27). Максимальная интенсивность полос серебра наблюдалась на расстоянии примерно 0,1 мм от начала полосы. Это соответствовало $s = 0,45 \div 0,5$ мм, что соответствует диапазону скоростей от 450 до 500 м/с. При температуре серебра, равной 1200 °C, теоретический расчёт даёт значение порядка 477 м/с, что также хорошо согласуется с полученным результатом.

Опыт, реализованный Штерном, по сути дела впервые позволил получить результаты, указывающие с достаточной степенью точности на реальность распределения Максвелла.

⁵ Расстояние между внутренними краями полосок серебра.

1.6.2. Опыт Бертольда Ламмерта (1929)

В основу опыта был положен метод Физо, использованный впервые им в 1849 году для определения скорости света с помощью вращающегося «зубчатого колеса». Суть этого метода в переложении на молекулярную физику состоит в следующем.

Представим себе два вращающихся диска на общей оси. Первый диск имеет тонкую щель в радиальном направлении. На небольшом расстоянии от этого диска есть щель, излучающая молекулярные пучки. В момент времени, когда эти щели совпадают, молекулы проходят через первый диск. Из этих молекул мы рассматриваем те, которые летят преимущественно параллельно оси системы. Через какое-то время молекулы достигают второго диска. За это время диск успевает повернуться на некоторый угол, и «точка» падения молекулы оказывается на некотором расстоянии от «точки», лежащей напротив прорези в первом диске. Причём чем меньше скорость молекул, тем дальше для них оказываются «точки» падения. Фотометрия этого спектра скоростей должна дать кривую распределения Максвелла.

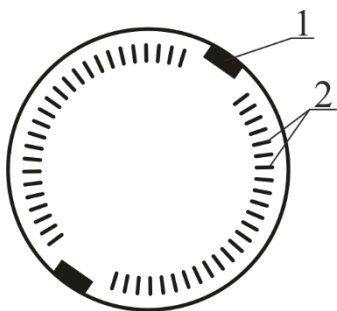


Рис. 13

На рис. 13 представлен внешний вид диска, применяемого Ламмертом. Этот диск пропускает часть от всех молекул, равную отношению площади всех щелей к общей площади кольца, вращающегося перед зазором печи. Если мы снаружи диска до половины закроем все щели 2 и вместо них откроем сектор 1, площадь которого равна сумме площадей всех щелей 2, то два молекулярных пучка пройдут через первый диск;

один – через сектор 1, другой, равный по интенсивности, – через щели 2 (рис. 13). Далее оба потока молекул достигают второго такого же диска. Первый пучок беспрепятственно проходит через сектор 1. Из второго пучка только часть молекул в ограниченном диапазоне скоростей проходит через щели 2. Осадок появляется на собирающей пластине в виде двух линий, время визуализации которых обратно пропорционально интенсивности молекулярных потоков, прошедших через систему из двух дисков.

Пролётная камера S и регистрационная A (рис. 14) были отделены друг от друга вертикальной латунной пластиной P толщиной 0,9 см и площадью $20 \times 20 \text{ см}^2$ и независимо откачаны.

Пространство излучения ограничивалось стеклянным колпаком G с внутренним диаметром 13 см и высотой 18 см. Он герметично устанавливался на полированной латунной пластине P . Источник излучения O и диафрагма B были жёстко закреплены на латунной раме M . Рама в горизонтальной плоскости навинчивалась на латунную пластину P . В середине поперечных сторон рамы располагалась ось, на которой на небольшом расстоянии от источника излучения и экрана крепились «шестерёнки» Z — два латунных диска с прорезями в кромке. Они, в свою очередь, закрывались железной трубкой длиной 6 см, образуя полый цилиндр R . Этот полый цилиндр служил ротором трёхфазного двигателя, статор St которого охватывал колпак.

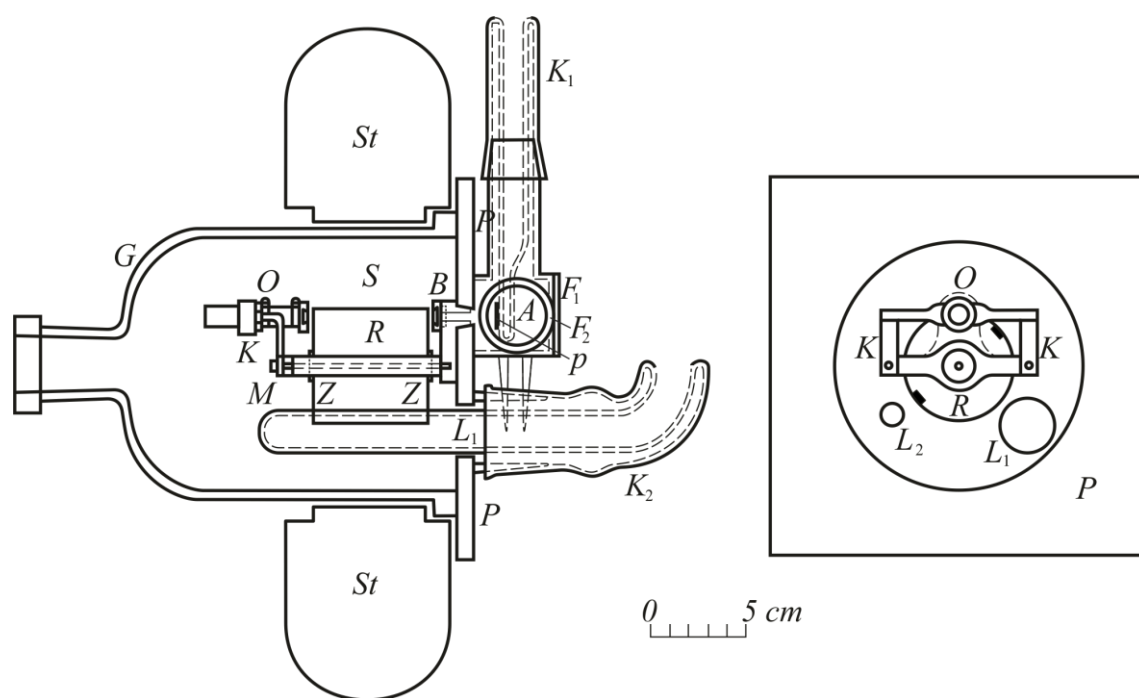


Рис. 14

Регистрационная камера A была ограничена закреплённой на пластине P латунной трубкой диаметром 4 см и длиной 4 см, которая была закрыта стеклянным окном F_1 , приклеенным к краю. Рядом находилось второе окно F_2 . На длинной вертикальной насадке, прикреплённой сверху, была стеклянная охлаждающая трубка K_1 , на уплощённом конце которой находилась пластина для сбора серебра p . Перед ней была установлена отражающая призма, позволяющая наблюдать поверхность пластины p через окно F_1 . Расположенная снизу вертикальная латунная муфта вела к насосу.

Пластина P имела два отверстия, L_1 и L_2 , каждое из которых было окружено металлическим конусом с внешней стороны пластины P . На широком конусе вокруг L_1 находилась охлаждающая трубка K_2 из кварцевого стекла, необходимая для устранения рассеянного излучения внутри камеры. Она заходила на 11 см через пластины вглубь пролётной камеры и имела площадь 80 см^2 . Через малый конус около L_2 производилось уплотнение интерфейса с четырьмя проводами для питания источника излучения O .

Источником излучения служила щель в цилиндрической печи из фосфорной бронзы. В печи находился небольшой стеклянный сосуд, заполненный испаряемым веществом. Печь нагревалась электрическим током мощностью около 4 Вт, протекающим через платиновое покрытие трубы из горного стекла, которая располагалась непосредственно около щели. Термопара из медного константана была расположена у выхода печи для контроля её температуры. Печь удерживалась кронштейном K , который закреплялся на латунную раму M и был изготовлен из константана для уменьшения теплоотвода.

Другая поперечная сторона рамы M закреплялась на пластине P . С этой же поперечной стороны в пластину P был плотно ввинчен полый конус. Со стороны излучающей камеры в этом конусе помещалось кольцо с надрезами в форме ласточкина хвоста, в котором можно было перемещать две разрезные губки, образующие проем B . Подшипники оси ротора были встроены в середину двух поперечных сторон рамы.

Диски ротора располагались на расстоянии 6 см по оси. Их диаметр составлял 5,7 см. По краю у каждого было по 50 щелей длиной 3 мм и шириной 0,24 мм (рис. 13). Снаружи было два сектора, пропускающих столько же, сколько все щели вместе взятые. Чтобы гарантировать, что угол смещения был одинаковым для каждой пары прорезей, оба диска были помещены друг на друга и отмечены непрерывной меткой в момент изготовления прорезей.

Поле, вращающее ротор, создавалось восьмиполюсным трёхфазным преобразователем постоянного тока 220 В с максимальной частотой 330 оборотов в секунду. Плоский статор был такой же длины, как и ротор, и устанавливался непосредственно на колпаке.

Обязательным условием экспериментов с молекулярными пучками является точная настройка. Юстировка проводилась с помощью микроскопа с перекрестием и микрометра.

Испытания проводились с молекулами ртути при температуре 100°C . Наиболее вероятная расчётная скорость $v_e = 214 \text{ м/с}$. Температура печи контролировалась термопарой и была постоянной с точностью до $0,1^\circ\text{C}$. Число оборотов ротора измеряли и контролировали стробоскопическим диском, на оси которого располагался тахометр. Отклонения частоты в процессе экспериментов не превышали 3 %. По достижении вышеуказанных условий собирающая пластина охлаждалась жидким воздухом и поворачивалась, устанавливаясь на пути молекулярного потока. После появления индикаторной линии пластину ещё немного поворачивали и регистрировали время визуализации двух линий, первая из которых формировалась сектором 1, вторая – системой щелей 2 (рис. 13).

Полученные Ламмертом результаты одной из ряда экспериментальных серий⁶ представлены на рис. 15. Высота прямоугольников отмечает относительную интенсивность регистрируемых потоков молекул ртути. Сплошными тонкими линиями показаны измеренные значения. Пунктирными – теоретически рассчитанные. Сплошной кривой изображена теоретическая зависимость. Из графика видно, что экспериментальные данные очень хорошо согласуются с теоретическими. Таким образом, Ламмерт, реализовав идею, поданную ему Отто Штерном, впервые экспериментальным путём не только качественно, но количественно подтвердил реальность теоретического распределения Максвелла.

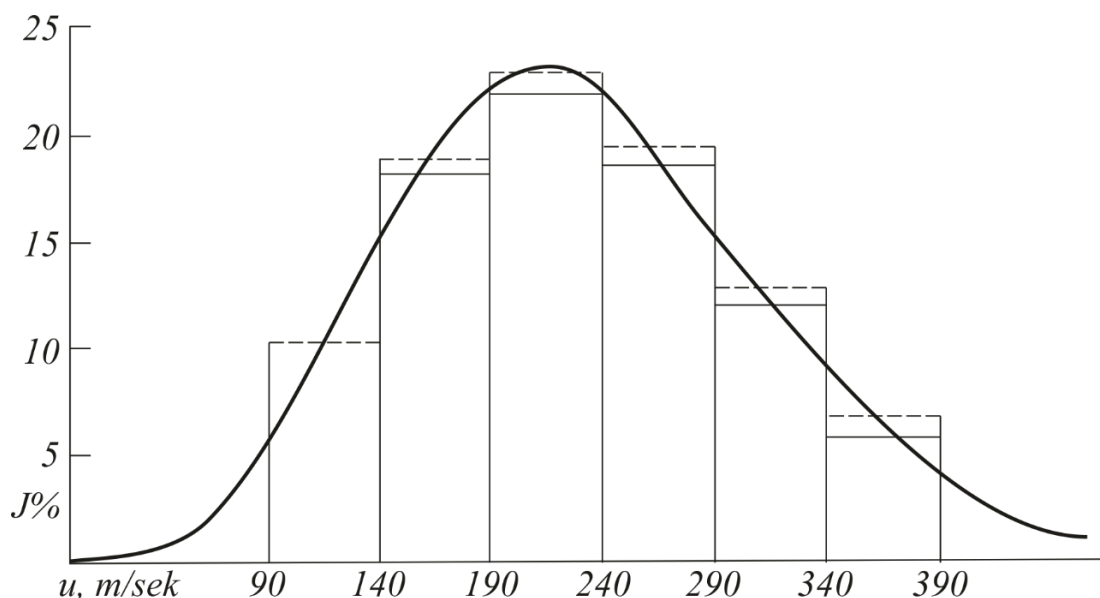


Рис. 15

⁶ Lammert B. Herstellung von Molekularstrahlen einheitlicher Geschwindigkeit (нем.) // Zeitschrift für Physik – 1929 – March Volume 56, Issue 3–4 – p.244–253.

1.7. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

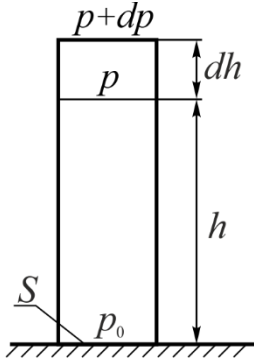


Рис. 16

Наряду с кинетической энергией движения молекул на давление газа оказывает влияние и сочетание таких физических понятий, как масса молекул и гравитационное притяжение планеты. Точнее, молекулы газа создают вокруг планеты атмосферный слой и фактически вес газа этого слоя порождает так называемое атмосферное давление.

Пусть p – давление на высоте h , p_0 – давление на высоте $h=0$. Давление на высоте $h+dh$ будет равно $p+dp$. Разность давлений p и $p+dp$ равна отношению веса воздуха, заключённого в объёме цилиндра высотой dh (рис. 16), к площади основания этого цилиндра S . Вес этого воздуха, подобно весу телу, равен силе тяжести, так как ускорение опоры равно нулю. Следовательно,

$$p - (p + dp) = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S dh g}{S} = \rho g dh, \quad (45)$$

где ρ – плотность воздуха на высоте h (высота цилиндра dh очень мала, и плотность воздуха в пределах этой высоты можно считать постоянной), g – ускорение свободного падения.

Из формулы (45) получаем:

$$dp = -\rho g dh. \quad (46)$$

Плотность воздуха запишем из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (47)$$

Формула (46) с учётом (47) примет вид

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

Выбирая пределы изменения высоты таким образом, что зависимостями T и g от h можно пренебречь, получаем:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh \Rightarrow \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\frac{Mgh}{RT}.$$

Потенцируя полученное равенство и выражая p , получаем:

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{Mgh}{RT} \right). \quad (48)$$

Формула (48) называется *барометрической*. Из неё следует, что атмосферное давление меняется экспоненциально с высотой. Данная формула не является универсальной. При её выводе мы пренебрегли зависимостью температуры и ускорения свободного падения от высоты. Но, тем не менее, она позволяет проводить оценки в реальных условиях. Например, такой прибор, как барометрический *альтиметр*, представляет собой барометр, шкала которого градуируется в значениях высоты.

Преобразуем формулу (48) с учётом (8), заменив молярную массу M на mN_A , а универсальную газовую постоянную R на kN_A .

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right), \quad (49)$$

где n и n_0 – концентрации молекул газа на высотах h и $h=0$ соответственно.

Полученное соотношение по сути представляет собой распределение концентрации молекул газа по высоте в поле тяжести. Обозначим потенциальную энергию молекулы на высоте h как $E_n = mgh$. Тогда формула (49) принимает вид

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (50)$$

Больцман доказал, что представленное распределение справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. Формула (50) получила название *распределения Больцмана*.

Распределение Больцмана похоже на распределение Максвелла по скоростям (21). В обоих случаях мы делим (знак минус в экспоненте) некие константы на экспоненты от отношения энергий молекул (потенциальной или кинетической) к величине kT , которая, в свою очередь, определяет энергию теплового движения этих же молекул.

Число молекул, содержащихся в выделенном элементарном объёме $dV = dxdydz$ в диапазоне координат от x, y, z до $x + dx, y + dy, z + dz$, можно определить как

$$dN(x, y, z) = ndV = n_0 \exp\left(-\frac{E_n(x, y, z)}{kT}\right) dxdydz. \quad (51)$$

Число молекул, компоненты скоростей которых лежат в диапазоне от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$, можно определить на основе соотношения (21) как

$$dN(v_x, v_y, v_z) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv_x dv_y dv_z. \quad (52)$$

Умножая вероятности на количество частиц, мы объединяем распределения (51) и (52) в единое **распределение Максвелла – Больцмана**

$$dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_k + E_n}{kT} \right) dv_x dv_y dv_z dx dy dz,$$

где $dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z)$ – число молекул, компоненты скоростей которых лежат в диапазоне от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$, а координаты – в диапазоне от x, y, z до $x + dx, y + dy, z + dz$; E_k – кинетическая энергия отдельных молекул.

1.8. Длина свободного пробега молекул

Молекулы газа при своём движении сталкиваются друг с другом. Однако термин «столкновение» в данном случае нельзя понимать буквально. Под столкновением молекул подразумевается процесс их взаимодействия, в результате которого изменяются направление движения и модуль скорости молекул.

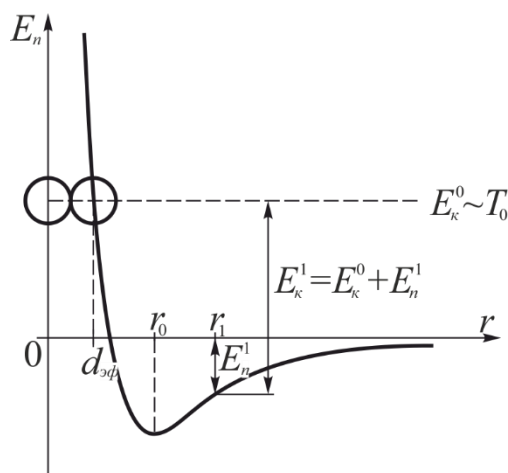


Рис. 17

Пусть имеются две молекулы, движущиеся навстречу друг к другу. Систему отсчёта свяжем с первой молекулой и будем рассматривать движение второй молекулы в силовом поле первой. Допустим, она движется

из области слабого поля, т.е. фактически из «бесконечности», с начальной кинетической энергией E_k^0 . По мере приближения к первой молекуле силовое поле начинает притягивать её (ускорять). Кинетическая энергия возрастает, а потенциальная E_n^1 снижается на эту же величину. При $r=r_0$ потенциальная энергия становится минимальной (рис. 17), а кинетическая достигает максимума. При дальнейшем движении потенциальная энергия молекулы в силовом поле начинает резко возрастать (в действие вступают силы отталкивания), и, когда E_n становится равной E_k^0 , молекула останавливается и начинает движения в изменённом направлении.

Минимальное расстояние, на которое сближаются центры молекул при «ударе», носит название **эффективного диаметра молекул** $d_{эф}$

(рис. 18). Очевидно, что чем больше начальная кинетическая энергия (абсолютная температура газа), тем меньше $d_{эф}$. В то же время по причине высокой скорости роста потенциальной кривой в области малых расстояний r (рис. 17) на практике в широком диапазоне температур $d_{эф}$ можно считать величиной постоянной.

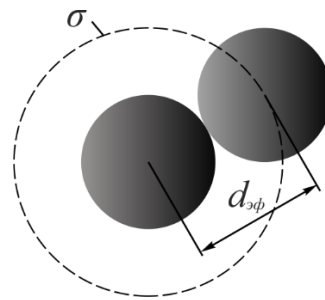


Рис. 18

Площадь, ограниченная окружностью с радиусом, равным $d_{эф}$, называется **эффективным сечением σ молекулы** (на рис. 18 обозначена пунктирной линией)

$$\sigma = \pi d_{эф}^2. \quad (53)$$

Средняя длина свободного пробега молекул – это среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами.

Силы отталкивания на расстояниях $r < r_0$ по модулю много больше сил притяжения при $r > r_0$. И в первом приближении можно рассматривать соударение молекул, используя модель столкновения твёрдых упругих шаров диаметром $d_{эф}$, не взаимодействующих друг с другом на расстоянии. Воспользуемся этой моделью для поиска средней длины свободного пробега молекул.

Для упрощения будем считать, что движется только одна выбранная молекула, а все остальные неподвижны. Молекула движется прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не происходит столкновение (рис. 19). Столкновение происходит в том случае, если центр неподвижной молекулы («закрашенные» молекулы на рис. 19) оказывается внутри воображаемого цилиндра диаметром $d_{эф}$, ось которого совпадает с движением центра летящей молекулы («незакрашенная» молекула на рис. 19).

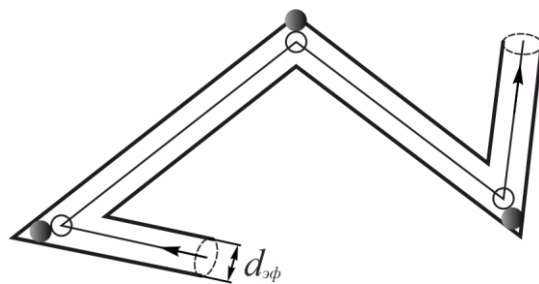


Рис. 19

За время t молекула проходит в среднем путь, равный произведению её средней арифметической скорости $\langle v \rangle$ относительно неподвижной системы отсчёта и этого времени t . За это же время среднее число столкновений $\langle z \rangle$, испытываемых молекулой, равно количеству молекул, центры

которых попадают вовнутрь изломанного цилиндра (рис. 19) на совокупной его длине $l = \langle v \rangle t$. В обычных условиях для газа длина свободного пробега λ оказывается много больше эффективного диаметра молекул $d_{эф}$. Следовательно, изломами цилиндра можно пренебречь и среднее число столкновений можно определить как произведение концентрации молекул n и объёма цилиндра:

$$\langle z \rangle = n\sigma l = n\sigma \langle v \rangle t. \quad (54)$$

В реальности все молекулы движутся. Тогда надо брать не среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ движения молекул относительно неподвижной системы координат, а среднюю арифметическую скорость движения молекул друг относительно друга $\langle v_{отн} \rangle$. Для любой пары молекул относительная скорость равна

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Возведём в квадрат и получим:

$$v_{отн}^2 = \vec{v}_{отн}^2 = \vec{v}_2^2 + \vec{v}_1^2 - 2\vec{v}_2\vec{v}_1 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_2v_1 \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{v}_2 и \vec{v}_1 .

Среднее значение

$$\langle v_{отн}^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - \langle 2v_2v_1 \cos \alpha \rangle. \quad (55)$$

Среднее значение квадратов скоростей $\langle v^2 \rangle$ для всех молекул одинаково, то есть $\langle v_2^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. Угол α изменяется от 0 до π . Следовательно, последний элемент формулы $\langle 2v_2v_1 \cos \alpha \rangle = 0$ и соотношение (55) принимает вид

$$\langle v_{отн}^2 \rangle = 2\langle v^2 \rangle.$$

Извлекаем корень и находим соотношение между среднеквадратичными скоростями:

$$v_{отн.кр.кв} = \sqrt{2}v_{кр.кв}.$$

Из формул (33) и (35) следует, что среднеарифметические скорости пропорциональны среднеквадратичным скоростям. Тогда получаем:

$$\langle v_{отн} \rangle = \sqrt{2}\langle v \rangle.$$

Подставляя полученное выражение в (54), для среднего числа соударений записываем:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}n\sigma \langle v \rangle t. \quad (56)$$

Средняя длина свободного пробега молекул определяется отношением расстояния, пройденного молекулой, и среднего числа соударений

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle t}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}. \quad (57)$$

Или с учётом (53)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d_{эф}^2}. \quad (58)$$

Таким образом, свободный пробег молекулы тем больше, чем меньше концентрация молекул и эффективный диаметр молекул. При постоянной концентрации повышение температуры приводит к уменьшению эффективного диаметра молекул, и это сопровождается слабым ростом длины свободного пробега.

Выразим концентрацию молекул из соотношения (8) и подставим в (58):

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} p \pi d_{эф}^2}. \quad (59)$$

Из формулы (59) следует, что при постоянной температуре длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению. То есть в изотермическом процессе

$$\lambda_1 p_1 = \lambda_2 p_2 = const. \quad (60)$$

Одним из экспериментальных методов определения средней длины свободного пробега молекул в газах является метод, основанный на **законе распределения свободных пробегов**.

Пусть имеется направленный вдоль оси x поток атомов. N_0 – число этих атомов в сечении с координатой $x = 0$. По мере движения количество атомов в пучке будет снижаться вследствие их рассеяния при столкновении с молекулами газовой среды. Обозначим N – число атомов, прошедших без рассеяния путь, равный x , dN – число атомов, испытывающих столкновения в слое толщиной dx и выбывающих из пучка в этом слое ($dN < 0$). Тогда отношение $-dN/N$ является вероятностью того, что атом, долетевший до рассматриваемого слоя, выйдет в этом слое из пучка. Вероятность этого равна вероятности столкновения атома с молекулой среды в слое толщиной dx , то есть равна dx/λ . Таким образом,

$$-\frac{dN}{N} = \frac{dx}{\lambda}.$$

Интегрируя

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\frac{1}{\lambda} \int_0^x dx,$$

получаем:

$$\ln N - \ln N_0 = -x/\lambda.$$

Поводим экспоненцирование и записываем **закон распределения свободных пробегов**:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (61)$$

Среднюю длину свободного пробега атомов в газовой среде можно оценить, если измерить число атомов N_1 и N_2 в сечениях потока, соответствующих координатам x_1 и x_2 . Тогда

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{\ln(N_2/N_1)}.$$

Данный метод в 1920 году был применён Максом Борном и Элизабет Борман для определения зависимости средней длины свободного пробега атомов серебра в воздухе от давления воздуха. Полученные данные подтвердили правильность теоретически выведенного соотношения (60).

Помимо указанного метода, среднюю длину свободного пробега λ можно экспериментально определить и на основе явлений переноса в газах. Рассмотрим эти явления подробнее.

1.9. Явления переноса

Явления переноса возникают при нарушении равновесия в системе. Нарушение равновесия сопровождается переносом из одной части системы в другую либо вещества, либо энергии, либо импульса и т.п. Для характеристики интенсивности данного явления используют понятие **плотности потока**.

Плотностью потока j какой-либо физической величины называют количество этой величины P , проходящей в единицу времени dt через единицу площади поверхности dS , перпендикулярной к направлению переноса.

$$\vec{j} = \frac{dP}{dSdt} \vec{n}. \quad (62)$$

1.9.1. Диффузия

Диффузия – это явление проникновения молекул одних веществ в другие, обусловленное их тепловым движением. При диффузии реализуется физический перенос частиц, то есть происходит перенос массы.

Допустим, смесь содержит две компоненты (рис. 20), плотности ρ_1 и ρ_2 которых меняются вдоль выбранного нами направления x . Разности концентраций стремятся выровняться, и как следствие формируются два встречных потока частиц, плотности которых равны j_{1m} и j_{2m} соответственно. Для плотностей потоков масс

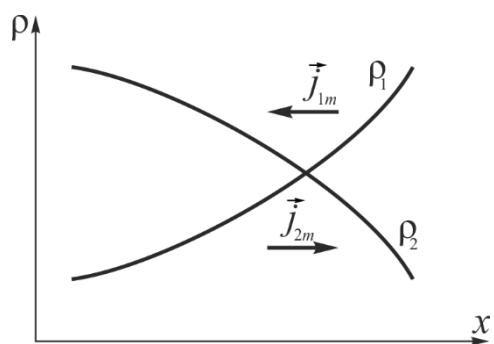


Рис. 20

таких компонентов опытным путём была получена формула **закона Фика**

$$j_{m,x} = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (63)$$

где D – коэффициент диффузии, $\partial \rho / \partial x$ – градиент плотности вдоль оси x . Знак минус означает, что поток частиц противоположен градиенту плотности, то есть направлен в сторону меньшего её значения.

В трёхмерном виде **закон Фика** имеет вид

$$\vec{j}_m = -D \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{e}_z \right) = -D \text{grad } \rho = -D \nabla \rho. \quad (64)$$

Если разделить соотношение (64) на массу молекулы соответствующей компоненты, то его можно записать в виде

$$\vec{j}_N = -D \text{grad } n, \quad (65)$$

где j_N – плотность потока молекул, $\text{grad } n$ – градиент концентраций этих молекул.

1.9.2. Внутреннее трение

Внутреннее трение – это явление, возникающее между слоями жидкости или газа, движущимися с разными скоростями. При этом реализуются постоянные переходы молекул из одного слоя в другой (рис. 21). Молекулы 2 из «быстрого» слоя, попадая в «медленный» слой, соударяются, вследствие

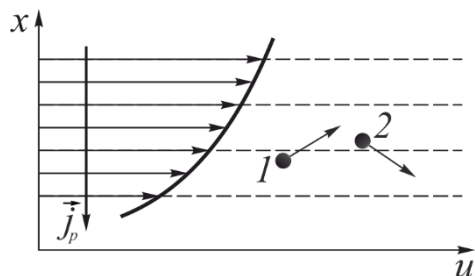


Рис. 21

чего их импульс снижается. А импульс молекул «медленного» слоя чуть увеличивается. И, наоборот, молекулы 1 «медленного» слоя, переходя в «быстрый» слой, увеличивают величину своего импульса, снижая скорость «быстрого» слоя. Таким образом, в механизме внутреннего трения

основную роль играют процессы перераспределения импульсов, и поэтому данный процесс можно назвать **явлением переноса импульса**.

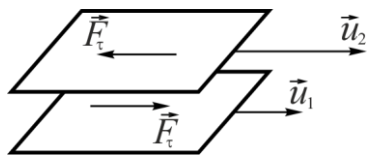


Рис. 22

По второму закону Ньютона равнодействующая сил равна скорости изменения импульса. Следовательно, для случая внутреннего трения мы можем в качестве величины плотности потока, идущего от одного слоя к другому, взять импульс, передаваемый в единицу времени через единицу поверхности. Тогда плотность потока импульса $p = \tau u$

$$j_{p,x} = -\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (66)$$

где η – коэффициент вязкости (вязкость), $\partial u / \partial x$ – градиент скорости слоёв жидкости или газа вдоль оси x . Знак минус означает, что поток импульса противоположен градиенту скорости.

В то же время с учётом соотношения (62)

$$j_{p,x} = \frac{\partial p}{\partial S \partial t} = \frac{dF_\tau}{dS},$$

то есть плотность потока импульса равна силе, действующей на единицу площади соприкасающихся слоёв в тангенциальном направлении (рис. 22).

1.9.3. Теплопроводность

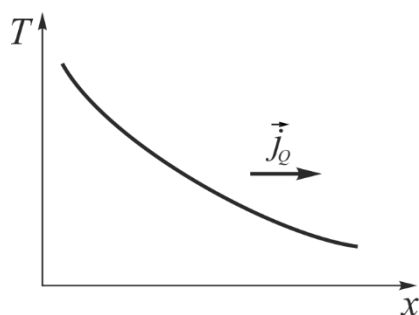


Рис. 23

Теплопроводность – это явление передачи тепла в среде с неоднородным распределением температуры (рис. 23). В данном случае реализуется перенос тепловой энергии из более нагретых областей к менее нагретым.

Поток тепла можно определить по формуле **закона Фурье**

$$j_{Q,x} = -\chi \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (67)$$

где χ – коэффициент теплопроводности (теплопроводность), $\partial T / \partial x$ – градиент температуры вдоль оси x . Знак минус, как и в двух предыдущих случаях, означает, что поток тепла противоположен градиенту температуры.

В трёхмерном случае **закон Фурье**

$$\vec{j}_Q = -\chi \text{grad } T. \quad (68)$$

1.9.4. Интерпретация явлений переноса с точки зрения МКТ

Для описания явлений переноса воспользуемся физической моделью, применяемой нами в разделе 1.2 при выводе основного уравнения МКТ. Будем считать, что в выбранном нами направлении одновременно движется $1/6$ часть от всех молекул. Тогда плотность потока молекул в соответствии с формулой (5) можно представить в виде

$$j = \frac{N_0}{Sdt} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle. \quad (69)$$

Поток j и является первопричиной переноса искомых нами величин. Выделим площадь S , перпендикулярную к оси x , и область, прилегающую к ней в диапазоне значений от $x - \lambda$ до $x + \lambda$ (рис. 24), где λ – средняя длина свободного пробега молекул. Будем считать, что именно в пределе расстояния, равного средней длине свободного пробега, реализуются крайние соударения молекул при переносе искомых величин. Условно обозначим за Y переносимую через границу S физическую величину, отнесённую к одной молекуле. Тогда суммарный поток этой величины можно найти как разницу прямого и обратного потоков

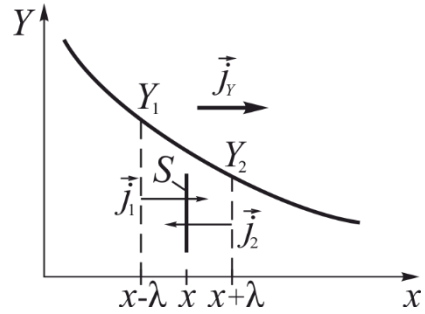


Рис. 24

$$j_Y = j_1 - j_2 = \frac{1}{6} n \langle v \rangle (Y_1 - Y_2). \quad (70)$$

Так как $Y = f(x)$, то её можно разложить в ряд Тейлора с учётом малых значений λ :

$$Y_1 = Y(x - \lambda) = Y(x) - \frac{\partial Y}{\partial x} \lambda,$$

$$Y_2 = Y(x + \lambda) = Y(x) + \frac{\partial Y}{\partial x} \lambda.$$

Тогда $Y_1 - Y_2 = -2\lambda \frac{\partial Y}{\partial x}$ и уравнение (70) для потока величины Y сводится к виду

$$j_Y = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \lambda \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (71)$$

Применим соотношение (71) к явлениям переноса (диффузии, вязкости и теплопроводности).

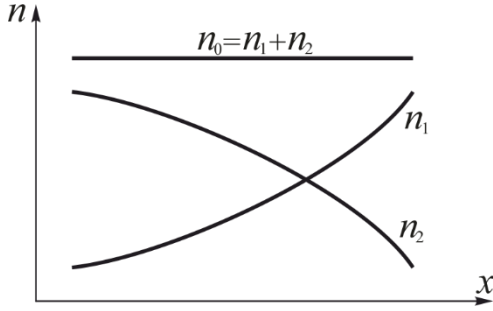


Рис. 25

1. Для диффузии $Y = n/n_0$, где n – концентрация молекул одной из компонент смеси в точке с координатой x ; n_0 – равновесная концентрация молекул (рис. 25).

Тогда для i -й компоненты получаем уравнение плотности потока молекул:

$$j_{N_i} = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \frac{\partial n_i}{\partial x}. \quad (72)$$

Сравнив полученное соотношение с (65), определяем коэффициент диффузии:

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda. \quad (73)$$

Стоит отметить, что полученный коэффициент D идентичен для обеих компонентов смеси.

2. Для вязкости реализуется перенос импульса. Поэтому $Y = p = tu$, где m – масса молекулы, u – её скорость. Тогда плотность потока импульса в соответствии с уравнением (71)

$$j_p = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \rho \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (74)$$

И с учётом (66) коэффициент вязкости равен

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \rho. \quad (75)$$

3. При теплопроводности происходит передача тепловой энергии. Поэтому $Y = ikT/2$. И плотность потока тепловой энергии

$$j_Q = -\frac{1}{3}n_0\langle v \rangle \lambda \frac{i}{2}k \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Учитывая, что

$$n_0 \frac{i}{2}k = \frac{N_0}{V} \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} = \frac{\nu}{V} C_V = \frac{m}{V} \frac{C_V}{\mu} = \rho c_V,$$

где C_V – молярная теплоёмкость вещества при постоянном объёме; c_V – удельная теплоёмкость вещества при постоянном объёме; ρ – плотность, получаем:

$$j_Q = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \rho c_V \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (76)$$

Сравнивая с законом Фурье (67), записываем коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_v. \quad (77)$$

Полученные коэффициенты диффузии (73), вязкости (75) и теплопроводности (77) связаны между собой простыми соотношениями

$$\eta = D\rho,$$

$$\chi = \eta c_v.$$

2. Лабораторный практикум

Лабораторная работа 1-8

ИЗУЧЕНИЕ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Цель работы: изучение явления вязкого трения при движении тел в жидкости, экспериментальное определение вязкости жидкости по методу Стокса.

Приборы и принадлежности: стеклянный сосуд с исследуемой жидкостью, набор шариков, штангенциркуль, микрометр, секундомер.

Элементы теории и метод эксперимента

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости.

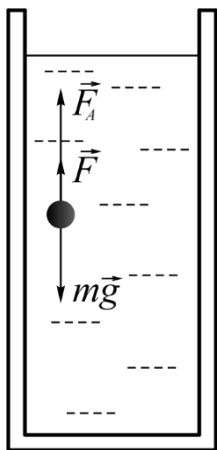


Рис. 26

При ламинарном течении жидкости между слоями, движущимися с различной скоростью, действуют силы, обусловленные вязкостью. Одним из методов измерения вязкости веществ (вискозиметрии) является метод падающего шарика, или метод Стокса (Stokes, 1851 г.). Английский физик Стокс показал, что на сферический шарик диаметром d , движущийся в вязкой

среде со скоростью v , со стороны ламинарного потока жидкости действует сила вязкого трения, равная

$$F = 3\pi\eta v d. \quad (78)$$

Рассмотрим движение твёрдого шарика при его падении в жидкости (рис. 26). По второму закону Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_A,$$

где F – сила вязкого трения; $F_A = \rho_{ж} g V$ – сила Архимеда; $mg = \rho g V$ – сила тяжести; $\rho_{ж}$ и ρ – плотности жидкости и материала шарика соответственно, $V = \pi d^3/6$ – объём шарика.

В проекции на ось, направленную вертикально вниз, уравнение движения принимает вид

$$m \frac{d\upsilon}{dt} = Vg(\rho - \rho_{ж}) - 3\pi\eta\upsilon d. \quad (79)$$

В случае установившегося (равномерного) движения ускорение обращается в ноль ($d\upsilon/dt = 0$), и тогда из уравнения (79) получаем:

$$\eta = \frac{Vg(\rho - \rho_{ж})}{3\pi\upsilon_y d} = \frac{d^2 g (\rho - \rho_{ж})}{18\upsilon_y}, \quad (80)$$

где υ_y – установившаяся скорость.

Обозначим через L путь, пройденный шариком в жидкости за время t со скоростью υ_y . Тогда выражение (80) можно переписать в виде

$$\eta = \frac{d^2 t (\rho - \rho_{ж}) g}{18L}. \quad (81)$$

Отметим, что полученное выражение (81) справедливо лишь тогда, когда шарик падает в безграничной среде.

Лабораторная установка (рис. 27) для измерения вязкости жидкостей по методу Стокса представляет собой стеклянный сосуд цилиндрической формы, заполненный исследуемой жидкостью. Сверху, вдоль оси цилиндра, бросают шарики. В верхней и нижней частях сосуда на расстояние L друг от друга нанесены горизонтальные метки. С помощью секундомера измеряют время движения шарика между этими метками. То есть в реальности исследуемая среда ограничена стенками и дном сосуда.

Впервые поправки в формуле Стокса, учитывающие влияние боковых стенок и дна сосуда, были теоретически обоснованы Ладенбургом в 1907 году. В дальнейшем они были уточнены, и с учётом этих поправок [1] формула (81) принимает вид

$$\eta = \frac{gd^2 t (\rho - \rho_{ж})}{18L \left(1 + 2,104 \frac{d}{D} \right) \left(1 + 3,1 \frac{d}{h} \right)}, \quad (82)$$

где D – диаметр сосуда, h – высота столба исследуемой жидкости.

Записанная нами формула (82) в плане практического применения имеет ряд особенностей и ограничений.

Во-первых, это ограничения по соотношению диаметра применяемых шариков, диаметра сосуда и высоты столба исследуемой жидкости. Рекомендуемые значения [1]: $0,1 > d/D > 0,004$; $d/h < 0,006$.

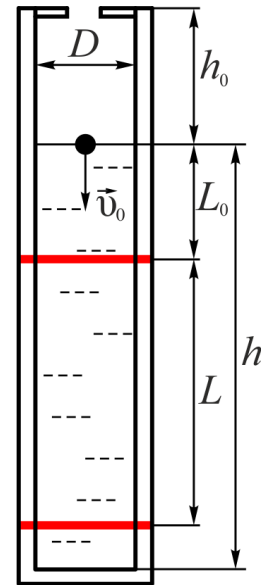


Рис. 27

Реально в нашем случае d/D имеет величину порядка $0,01 \div 0,1$, а $d/h < 0,005$. Поэтому поправкой на высоту столба исследуемой жидкости можно пренебречь. Тогда формула (82) упрощается и принимает вид

$$\eta = \frac{gd^2t(\rho - \rho_{ж})}{18L\left(1 + 2,104\frac{d}{D}\right)}. \quad (83)$$

Во-вторых, формула (83) может применяться только лишь при достаточно медленном движении твёрдого шарика в вязкой жидкости. Поток жидкости, обтекающий шарик, должен быть ламинарным. Условие ламинарности определяется значением безразмерного параметра, именуемого **числом Рейнольдса**, в которое входят искомое значение динамического коэффициента вязкости и скорость потока самой жидкости:

$$R_e = \frac{\rho_{ж} v d}{\eta}.$$

Переход от ламинарного течения жидкости к турбулентному реализуется в диапазоне значений R_e от 1000 до 2400. Таким образом, формула Стокса может использоваться для $R_e < 1000$.

Однако в данном случае рассматривается не просто течение однородной жидкости, а движение инородного сферического тела в ней с постоянной (установившейся) скоростью v_y . В этом случае ограничение числа Рейнольдса становится ещё более жёстким: $R_e < 0,1$ [2], а его значение определяется как

$$R_e = \frac{\rho_{ж} v_y d}{\eta}. \quad (84)$$

И, в-третьих, минимальное расстояние от поверхности жидкости до первой (верхней) метки ограничено условием необходимости исключения первоначального ускоренного участка движения падающего в жидкости шарика. Выведем формулу для оценки этого расстояния.

Перепишем уравнение (79) с учётом (80) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -3\pi\eta d(v - v_y). \quad (85)$$

Перенесём m вправо, заменив её на ρV , и, раскрыв объем, получим:

$$\frac{d(v - v_y)}{dt} = -\frac{18\eta}{\rho d^2}(v - v_y). \quad (86)$$

Решение дифференциального уравнения (86) найдём, используя метод разделения переменных:

$$\frac{d(v - v_y)}{v - v_y} = -\frac{18\eta}{\rho d^2} dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{d(v - v_y)}{v - v_y} = -\frac{18\eta}{\rho d^2} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v - v_y}{v_0 - v_y} = -\frac{18\eta}{\rho d^2} t.$$

Потенцируя полученное соотношение (избавляемся от логарифма, возводя экспоненту в степень левой и правой частей соотношения), получаем зависимость скорости шарика от времени:

$$v(t) = v_y - (v_y - v_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (87)$$

где $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ – скорость шарика на границе раздела двух сред (воздух-жидкость); h_0 – расстояние от точки броска до поверхности жидкости (рис. 27); τ – **время релаксации**, определяемое из соотношения

$$\tau = \frac{\rho d^2}{18\eta}. \quad (88)$$

Время релаксации – это величина, которая показывает, насколько быстро устанавливается стационарный режим движения. Обычно считают, что при $t \approx 3\tau$ движение практически не отличается от стационарного. Тогда путь, пройденный шариком в жидкости до установления стационарного режима, можно найти как

$$s \approx \int_0^{3\tau} v(t) dt.$$

Подставив (87) в это выражение, получим формулу для оценки расстояния от поверхности жидкости до первой (верхней) метки:

$$s = \left[3v_y - (v_y - v_0)(1 - \exp(-3)) \right] \tau$$

или с учётом того, что $1 - \exp(-3) \approx 0,95$:

$$s = \left[2,05v_y + 0,95v_0 \right] \tau. \quad (89)$$

Порядок выполнения работы

1. Измерить с помощью штангенциркуля внутренний диаметр сосуда D , с помощью линейки – расстояние от точки броска до поверхности жидкости h_0 , расстояние, проходимое шариком от поверхности жидкости до верхней метки L_0 , расстояние между горизонтальными метками на сосудах L (рис. 27). Ускорение силы тяжести считать равным $9,815 \text{ м/с}^2$. Плотность жидкости и плотность вещества шариков указаны на лабораторной установке. Результаты занести в таблицу.

2. С помощью микрометра измерить диаметр первого шарика d , используемого в эксперименте. Результат занести в таблицу.

Таблица

№ п/п	D	h_0	L	L_0	ρ	$\rho_{жс}$	d	t
1								
2								
3								
...								

3. Опустить шарик и измерить время его прохождения на отрезке пути L между метками. Опыт повторить с 5 шариками, имеющими **близкие по значению диаметры**. По результатам опытов определить среднее время их падения между метками t_{cp} и средний диаметр шариков d_{cp} .

4. По формуле (83) вычислить среднее значение вязкости жидкости η_{cp} .

5. Оценить погрешность определения вязкости по следующему алгоритму:

а) оценить абсолютные значения погрешности для ρ , $\rho_{жс}$ и D по их систематическим составляющим с учётом доверительной вероятности $P=0,95$: $\Delta_c = 1,1 \cdot C/2$, где C – либо цена деления измерительного прибора, либо значение последнего известного разряда соответствующей величины;

б) оценить абсолютные значения погрешности для d и t как среднеквадратичную сумму их систематической и случайной составляющих

$$\Delta x = \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_{cl}^2}, \text{ где } \Delta_c = 1,1 \cdot C/2; \Delta_{cl} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{cp} - x_i)^2}; n - \text{число}$$

измерений; x_{cp} – среднее арифметическое значение величины; x_i – значение величины в i -м измерении; t_c – коэффициент Стьюдента для $P = 0,95$;

в) оценить относительные погрешности для D , d и t , определяемые как отношение абсолютных значений их погрешности к среднему значению соответствующей величины: $\delta_x = \Delta x/x_{cp}$;

г) оценить относительную погрешность вязкости, пренебрегая составляющими δ_g и δ_L вследствие их малости, по формуле

$$\delta_{\eta} = \sqrt{\left(\frac{2 + 2,104 \cdot d_{cp}/D}{1 + 2,104 \cdot d_{cp}/D} \right)^2 \delta_d^2 + \delta_t^2 + \left(\frac{\Delta \rho + \Delta \rho_{жс}}{\rho - \rho_{жс}} \right)^2 + \left(\frac{2,104 \cdot d_{cp}/D}{1 + 2,104 \cdot d_{cp}/D} \right)^2 \delta_D^2};$$

д) оценить абсолютную погрешность определения вязкости $\Delta \eta = \eta_{cp} \delta_{\eta}$.

6. Записать результат в виде $\eta = \eta_{cp} + \Delta \eta$ (Па·с), $\delta_{\eta} = \dots \%$, $P = 0,95$.

7. По формуле (84) определить значение числа Рейнольдса и сделать вывод о применимости формулы Стокса.

8. По формуле (89) оценить путь, пройденный шариком до установления стационарного режима, сравнить его с расстоянием L_0 и сделать вывод, можно ли к моменту прохождения шариком верхней метки считать его движение установившимся.

9. Сформулировать вывод о проделанной работе, отразив в нем **все полученные** по пп. 5 – 8 результаты.

Контрольные вопросы

1. Объяснить молекулярно-кинетический механизм явления внутреннего трения.

2. Дать определение понятия вязкости и единиц её измерения.

3. В чем суть определения вязкости по методу Стокса? Какие ещё методы определения вязкости существуют? Поясните подробнее отличительные черты этих методов.

4. Какие силы действуют на шарик, падающий в вязкой жидкости? Как эти силы связаны между собой в случае установившегося движения?

5. Что такое ламинарное и турбулентное течения жидкости?

6. Каков физический смысл числа Рейнольдса?

7. Какие измерения вносят наибольшую погрешность в результат косвенного измерения вязкости жидкости в ваших опытах?

8. Выведите расчётную формулу для вязкости жидкости.

9. Запишите расчётную формулу, объясните условия её применения и причину начала измерения времени не от поверхности жидкости.

10. Выведите формулу зависимости скорости падения шарика в жидкости от времени.

11. Изобразите на графике зависимость скорости падения шарика в жидкости от времени для двух различных времён релаксации.

12. Имеется два шарика из одинакового материала, но различного размера. Какой шарик будет быстрее падать в вязкой жидкости? Когда шарик быстрее падает в вязкой жидкости: в узком сосуде или в широком?

13. Как зависит вязкость жидкости от температуры и почему?

Лабораторная работа 1-26

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ, СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА И ЭФФЕКТИВНОГО ДИАМЕТРА МОЛЕКУЛ ВОЗ- ДУХА

Цель работы: изучение явления вязкого трения при протекании газа через капилляр, экспериментальное определение вязкости воздуха по методу Пуазёйля, а также оценка средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка УКЛЮ-2В-4, термометр, секундомер.

Элементы теории и метод эксперимента

В основе измерения вязкости газов по методу Пуазёйля лежит установленный им факт, что объёмный расход газа (объём газа в единицу времени), протекающего через трубку малого диаметра (капилляр), определяется его вязкостью. Однако этот метод имеет следующее ограничение. Существует два режима течения газов. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание газа. Метод Пуазёйля можно использовать только для первого типа течения.

Рассмотрим ламинарное течение воздуха в капилляре (рис. 28). Наличие сил внутреннего трения приводит к возникновению градиента

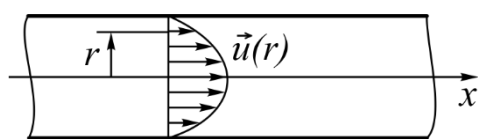


Рис. 28

скорости упорядоченного движения du/dr . Очевидно, что наибольшая скорость – на оси симметрии капилляра.

Пусть радиус капилляра r_0 , длина L . Воздух протекает слева направо вследствие разности давлений на концах капилляра $p_1 - p_2$. Вырежем мысленно в газе цилиндрический слой с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ (рис. 29).

На этот слой со стороны более быстрых слоёв действует "ускоряющая" сила внутреннего трения, равная произведению плотности потока импульса (66) и площади контакта данного слоя с соседними S

$$F(r) = -\eta \frac{du}{dr} S. \quad (90)$$

Соотношение (90) называют законом Ньютона для внутреннего трения (Newton, 1687 г.).

Площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi rL$. Следовательно,

$$F(r) = -\eta \frac{du}{dr} 2\pi rL. \quad (91)$$

Со стороны более медленных слоёв, прилегающих к выбранному, действует "замедляющая" сила $F(r+dr)$, причём силы $F(r)$ и $F(r+dr)$ направлены в противоположные стороны. Равнодействующая сила, действующая на выделенный слой, равна приращению силы при увеличении расстояния r от оси на dr и может быть найдена с помощью соотношения $dF = F(r+dr) - F(r)$.

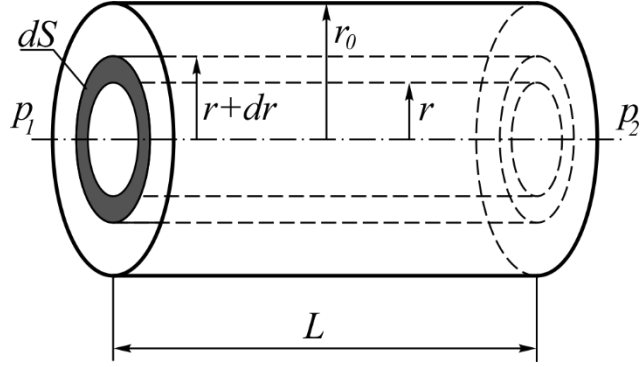


Рис. 29

Считая коэффициент внутреннего трения η не зависящим от r , из (91) получаем:

$$dF = d\left(-2\pi\eta Lr \frac{du}{dr}\right) = -2\pi\eta Ld\left(r \frac{du}{dr}\right). \quad (92)$$

При отклонении от оси скорость упорядоченного движения слоёв воздуха уменьшается, так что $du/dr < 0$. Поэтому $dF > 0$. При стационарном течении воздуха эта сила равна силе dF' , действующей на поперечное сечение слоя dS из-за разности давлений $p_1 - p_2$ (рис. 28):

$$dF' = (p_1 - p_2) dS = (p_1 - p_2) 2\pi r dr. \quad (93)$$

Приравнивая выражения (92) и (93), получаем:

$$-2\pi\eta Ld\left(r \frac{du}{dr}\right) = (p_1 - p_2) 2\pi r dr. \quad (94)$$

Из соотношения (94) следует дифференциальное уравнение

$$d\left(r \frac{du}{dr}\right) = -\frac{p_1 - p_2}{\eta L} r dr.$$

Результат его интегрирования

$$r \frac{du}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r^2 + C. \quad (95)$$

Постоянную C найдём из условия, что при $r = 0$ скорость упорядоченного движения достигает максимума. Следовательно, её производная при $r = 0$ должна обращаться в нуль

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0.$$

Это реализуется в случае, если $C = 0$. В формуле (95) разделяем переменные и записываем интеграл:

$$\int du = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \int r dr.$$

Результат интегрирования

$$u = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta L} r^2 + C'. \quad (96)$$

Постоянную C' определяем из условия, что скорость потока «на стенке» капилляра равна нулю. Тогда, подставляя значения $u = 0$ и $r = r_0$ в (96), определяем:

$$C' = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} r_0^2. \quad (97)$$

Переписываем соотношение (96) с учётом (97):

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (r_0^2 - r^2). \quad (98)$$

Найдём теперь объём воздуха, протёкшего через капилляр за время t . Из выбранного нами слоя (рис. 29) за время t вытечет объём газа $dV = ut2\pi r dr$. Используя соотношение (98), получаем:

$$dV = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta L} (r_0^2 r - r^3) dr. \quad (99)$$

Проинтегрируем (99) по всей площади поперечного сечения капилляра (от $r = 0$ до $r = r_0$):

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta L} \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta L} \left(r_0^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^{r_0},$$

и запишем **формулу Пуазёйля**:

$$V = \frac{1}{\eta} \frac{\pi}{8L} (p_1 - p_2) t r_0^4. \quad (100)$$

Заметим, что объём протекающего за время t газа очень сильно зависит от радиуса капилляра ($V \sim r_0^4$). Отметим также, что для газов ламинарное (слоистое) течение возможно лишь при малых скоростях течения

(малых перепадах давления) и в весьма тонких капиллярах.

Из формулы Пуазёйля (100) выразим коэффициент внутреннего трения (вязкость) воздуха:

$$\eta = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8VL} tr_0^4 = \frac{\pi\Delta p}{8VL} tr_0^4. \quad (101)$$

Формула Пуазёйля применима к течению газа по трубке, если сжимаемостью газа можно пренебречь. Это возможно при условии малого перепада давлений на концах трубки, при ламинарном течении газа и постоянной температуре. О характере течения можно судить по значению так называемого числа Рейнольдса

$$R_e = \frac{\rho v_{cp} r}{\eta}, \quad (102)$$

где ρ – плотность газа; v_{cp} – средняя скорость его течения; r – радиус трубки. При $R_e < 1000$ течение ламинарно, при $R_e > 2400$ – турбулентно.

Из соотношения (75) получаем выражение для средней длины свободного пробега молекулы:

$$\lambda = \frac{3\eta}{\langle v \rangle \rho}.$$

Подставив среднюю скорость теплового движения молекул (33), выразив плотность газа $\rho = \frac{pM}{RT}$ из уравнения Клапейрона – Менделеева (7) и приняв значение давления равным атмосферному $p_{атм}$, получим:

$$\lambda = \frac{3\eta}{p_{атм}} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}} \approx 1,88 \cdot \frac{\eta}{p_{атм}} \sqrt{\frac{RT}{M}}. \quad (103)$$

Соотношение для оценки эффективного диаметра молекул выразим из формулы (59):

$$d_{эфф} = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\lambda p_{атм}}}. \quad (104)$$

Внешний вид экспериментальной установки представлен на рис. 30. На передней панели расположены: кран К1 (1) подключения вспомогательной ёмкости к компрессору, кран К2 (2) подключения вспомогательной ёмкости к капилляру (3), водяной U-образный манометр (4) с измерительной шкалой (5), мерная ёмкость (6) со шкалой (7) и тумблер включения компрессора (8).

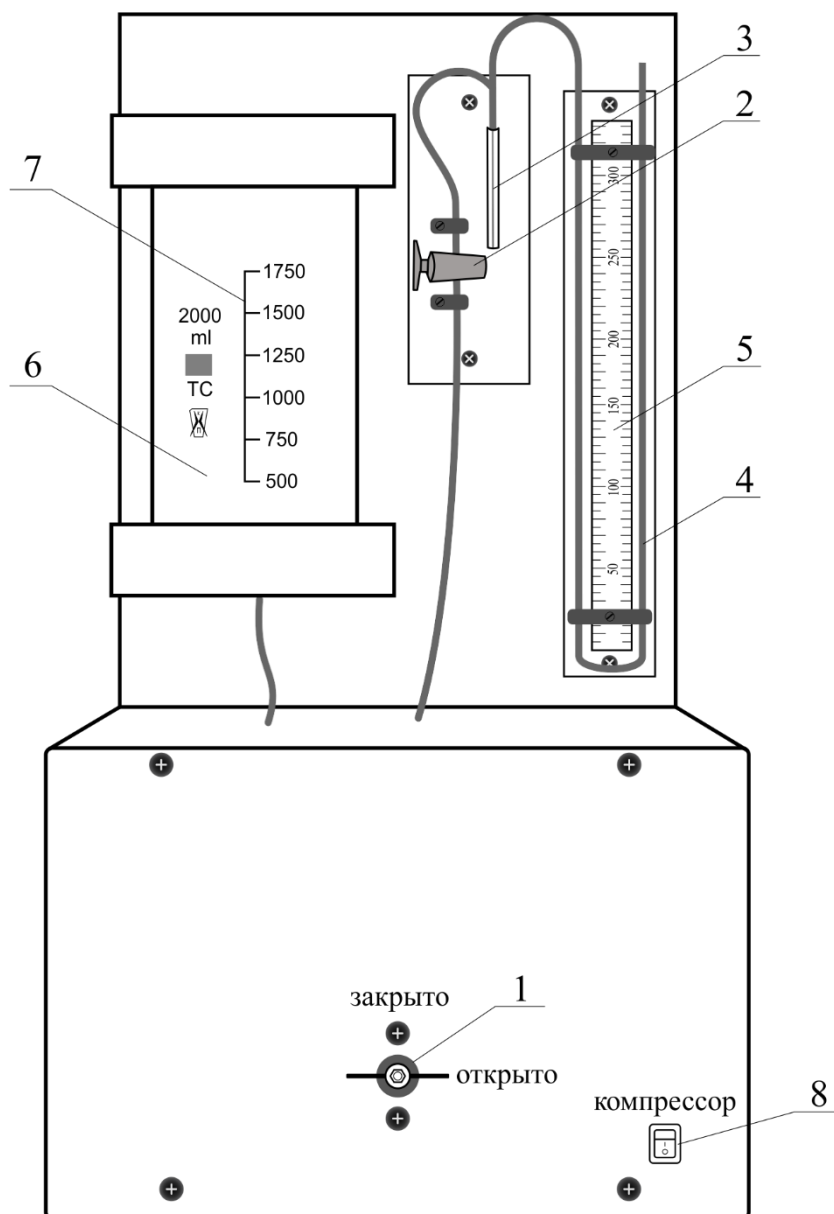


Рис. 30

Схема установки показана на рис. 31. Она включает в себя капилляр (3), соединённый одним концом через кран К2 со вспомогательной ёмкостью (9), наполненной частично дистиллированной водой, и U-образным манометром (4). Другой конец капилляра сообщается с атмосферой. Мерная ёмкость (6) соединена трубкой (10) со вспомогательной ёмкостью (9). С помощью трубопровода вспомогательная ёмкость (9) через кран К1 соединена с компрессором. При закрытом кране К2 и открытом К1 во вспомогательную ёмкость (9) компрессором накачивается воздух, и вода через трубопровод вытесняется в мерную ёмкость (6). При закрытом кране К1 и открытом К2 вода вытесняет воздух из вспомогательной ёмкости через капилляр в атмосферу.

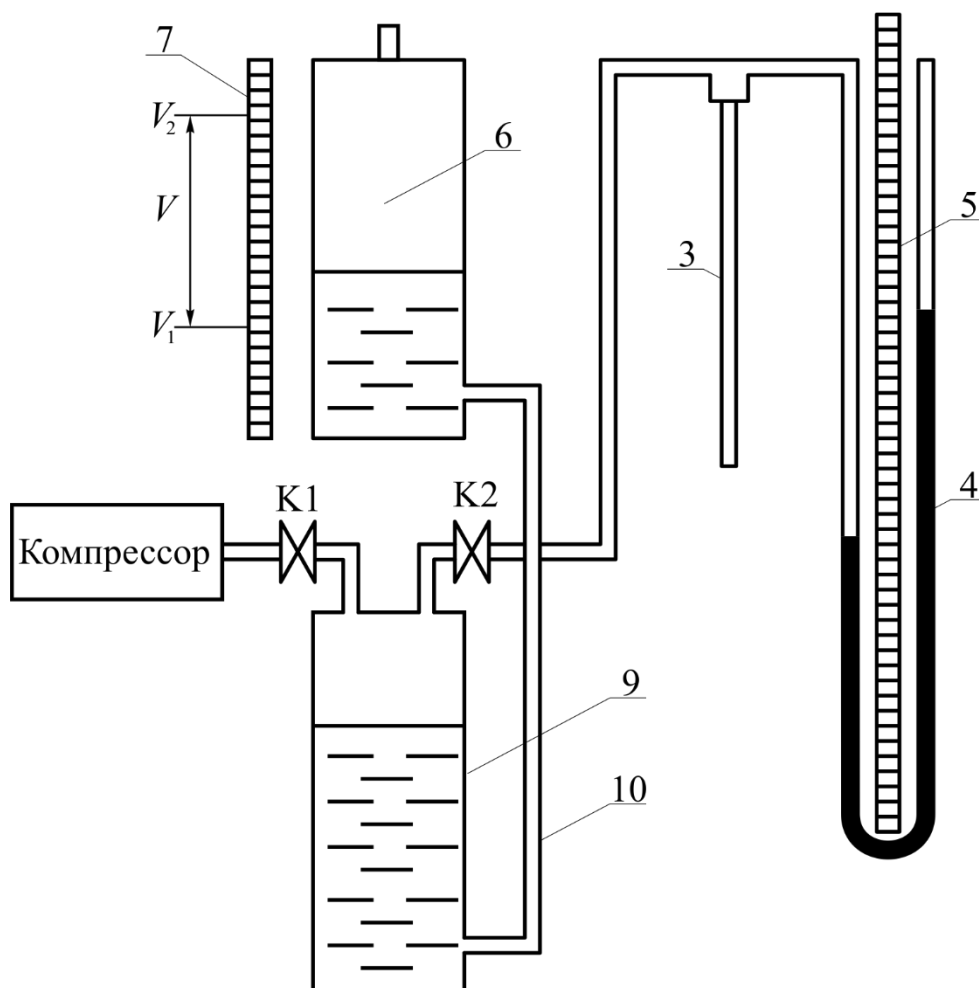


Рис. 31

Так как сечение капилляра мало, на его концах возникает разность давлений воздуха, которую можно определить по разности уровней воды $h_1 - h_2$ в коленах U-образного манометра (4):

$$\Delta p = \rho_g g (h_1 - h_2) = \rho_g g \Delta h, \quad (105)$$

где ρ_g – плотность воды, g – ускорение свободного падения. С помощью секундомера замеряется время истечения заданного объема воздуха из мерной ёмкости. Значение объема вытесняемого воздуха $V = V_2 - V_1$ определяется с помощью уровнемера (7).

Порядок выполнения работы

1. Тумблером «КОМПРЕССОР» включить электропитание компрессора.
2. Открыть кран K1 и подождать, пока наполнится мерная ёмкость чуть выше отметки объема воды, выбранной в качестве границы верхнего уровня. Закрыть кран K1.

3. Открыть кран К2. При достижении границы верхнего уровня включить секундомер и произвести отсчёт разности уровней жидкости в водяном U-образном манометре Δh_1 . Результат записать в таблицу.

Таблица

№ п/п	Δh_1	Δh_2	t	$\langle \Delta h_1 \rangle$	$\langle \Delta h_2 \rangle$	$\langle t \rangle$	Δp_1	Δp_2	Δp
1									
2									
...									
10									

4. В момент достижения водой уровня нижней отметки уровнемера выключить секундомер и повторно произвести отсчёт разности уровней жидкости в водяном U-образном манометре Δh_2 . Закрыть кран К2. Результаты замеров записать в таблицу.

5. Пункты 2 – 4 повторить девять раз для одного и того же объёма проходящего через капилляр воздуха V (объём сливаемой жидкости).

6. Записать длину капилляра L , его радиус r_0 , объём V , значения атмосферного давления $p_{атм}$ и абсолютной температуры T в лаборатории.

7. По результатам измерений вычислить средние значения $\langle \Delta h_1 \rangle$, $\langle \Delta h_2 \rangle$ и $\langle t \rangle$.

8. Приняв ускорение свободного падения $g = 9,815 \text{ м/с}^2$, плотность воды $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$, по формуле (105) для средних значений Δh вычислить начальный и конечный перепады давлений на капилляре (Δp_1 и Δp_2 соответственно) и оценить средний перепад давлений $\Delta p = (\Delta p_1 + \Delta p_2)/2$.

9. По формулам (101), (103), (104) рассчитать коэффициент внутреннего трения воздуха η , среднюю длину свободного пробега молекул воздуха λ и эффективный диаметр молекул воздуха $d_{эфф}$. Молярную массу воздуха принять равной $M = 28,98 \text{ г/моль}$, атмосферное давление – $p_{атм} = 100,0 \pm 2,5 \text{ кПа}$.

10. Оценить погрешности полученных величин по следующему алгоритму. Вычислить:

а) абсолютные значения погрешности для $\langle \Delta h_1 \rangle$, $\langle \Delta h_2 \rangle$ и $\langle t \rangle$ как среднеквадратичную сумму их систематической и случайной составляющих

$$\Delta x = \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta_{сл}^2},$$

где $\Delta_c = 1,1 \cdot C/2$; C – цена деления измерительного прибора (манометра

или секундомера); $\Delta_{cl} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle x \rangle - x_i)^2}$; n – число измерений;

$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i / n$ – среднее арифметическое значение величины; x_i – значение

величины в i -м измерении; t_c – коэффициент Стьюдента для $P = 0,95$;

б) относительные погрешности

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle};$$

в) абсолютные погрешности величин Δp_1 и Δp_2

$$\Delta(\Delta p_1) = \Delta p_1 \cdot \delta_{\Delta h_1}, \quad \Delta(\Delta p_2) = \Delta p_2 \cdot \delta_{\Delta h_2};$$

г) относительную погрешность Δp

$$\delta_{\Delta p} = \frac{\Delta(\Delta p_H) + \Delta(\Delta p_K)}{\Delta p_H + \Delta p_K};$$

д) относительные и абсолютные погрешности вязкости η

$$\delta_\eta = \sqrt{\delta_{\Delta p}^2 + \delta_L^2 + \delta_t^2 + (4 \cdot \delta_{r_0})^2}, \quad \Delta\eta = \eta \cdot \delta_\eta,$$

длины свободного пробега λ

$$\delta_\lambda = \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_{p_{атм}}^2 + \left(\frac{1}{2} \delta_T\right)^2}, \quad \Delta\lambda = \lambda \cdot \delta_\lambda,$$

и эффективного диаметра молекул воздуха $d_{эфф}$

$$\delta_{d_{эфф}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \delta_T\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \delta_\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \delta_{p_{атм}}\right)^2}, \quad \Delta d_{эфф} = d_{эфф} \cdot \delta_{d_{эфф}}.$$

11. Сформулировать вывод о проделанной работе и выписать полученные результаты в виде:

$$\eta = \eta + \Delta\eta \text{ (Па·с)}, \quad \delta_\eta = \dots\%, \quad P = 0,95;$$

$$\lambda = \lambda + \Delta\lambda \text{ (мкм)}, \quad \delta_\lambda = \dots\%, \quad P = 0,95;$$

$$d_{эфф} = d_{эфф} + \Delta d_{эфф} \text{ (нм)}, \quad \delta_{d_{эфф}} = \dots\%, \quad P = 0,95.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории.

2. Дайте определения следующих понятий: средняя длина пробега молекулы, эффективный диаметр молекулы, эффективное сечение столкновения.

3. В каких условиях применима формула Пуазёйля?
4. Какие прямые измерения вносят наибольшие погрешности в результат косвенного измерения η , $d_{эфф}$ и λ ?
5. Выведите формулу Пуазёйля.
6. Выведите, основываясь на молекулярно-кинетической теории, формулу для коэффициента вязкости газа.
7. Выведите формулу для средней длины свободного пробега.
8. Типы течений газа. Число Рейнольдса.

Лабораторная работа 1-27

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВОЗДУХА МЕТОДОМ НАГРЕТОЙ НИТИ

Цель работы: изучение явления теплопроводности газов и экспериментальное определение зависимости коэффициента теплопроводности воздуха, находящегося вблизи нагретой нити, от её температуры.

Приборы и принадлежности: экспериментальная установка.

Элементы теории и метод эксперимента

Распространение теплоты в газах осуществляется тремя способами: тепловым излучением (перенос энергии электромагнитными волнами); конвекцией (перенос энергии за счёт перемещения слоёв газа в пространстве из областей с высокой температурой в области с низкой температурой) и теплопроводностью.

Теплопроводность – перенос теплоты от более нагретых частей тела к менее нагретым за счёт хаотического теплового движения молекул. Обычно этот процесс приводит к выравниванию температуры и к прекращению процесса теплопередачи. Если же поддерживать неизменной разность температур двух тел, разделённых газовым промежутком, то возникает стационарный процесс, в котором количество теплоты, передаваемое через этот промежуток в единицу времени, остаётся постоянным.

Теоретическое значение коэффициента теплопроводности может быть рассчитано по формуле (77)

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_v.$$

Здесь $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул; λ – средняя длина свободного пробега молекул; ρ – плотность газа; c_v – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме V .

С учётом соотношений (33) и (58)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = m_0 n,$$

где m_0 – масса молекулы; k – постоянная Больцмана; σ – эффективное сечение столкновений молекул; N – число молекул; n – концентрация молекул, получаем:

$$\chi = \text{const} \cdot \frac{c_v}{\sigma} \sqrt{T}. \quad (106)$$

Для реальных газов коэффициент теплопроводности с увеличением температуры растёт быстрее, чем следует из (106). Это связано с незначительным увеличением c_V и уменьшением эффективного сечения столкновений σ с ростом температуры. В частности, из опытов следует, что для многих реальных газов, в том числе и для воздуха:

$$\chi = \text{const} \cdot T^b, \quad (107)$$

где показатель b лежит в пределах от 0,5 до 1.

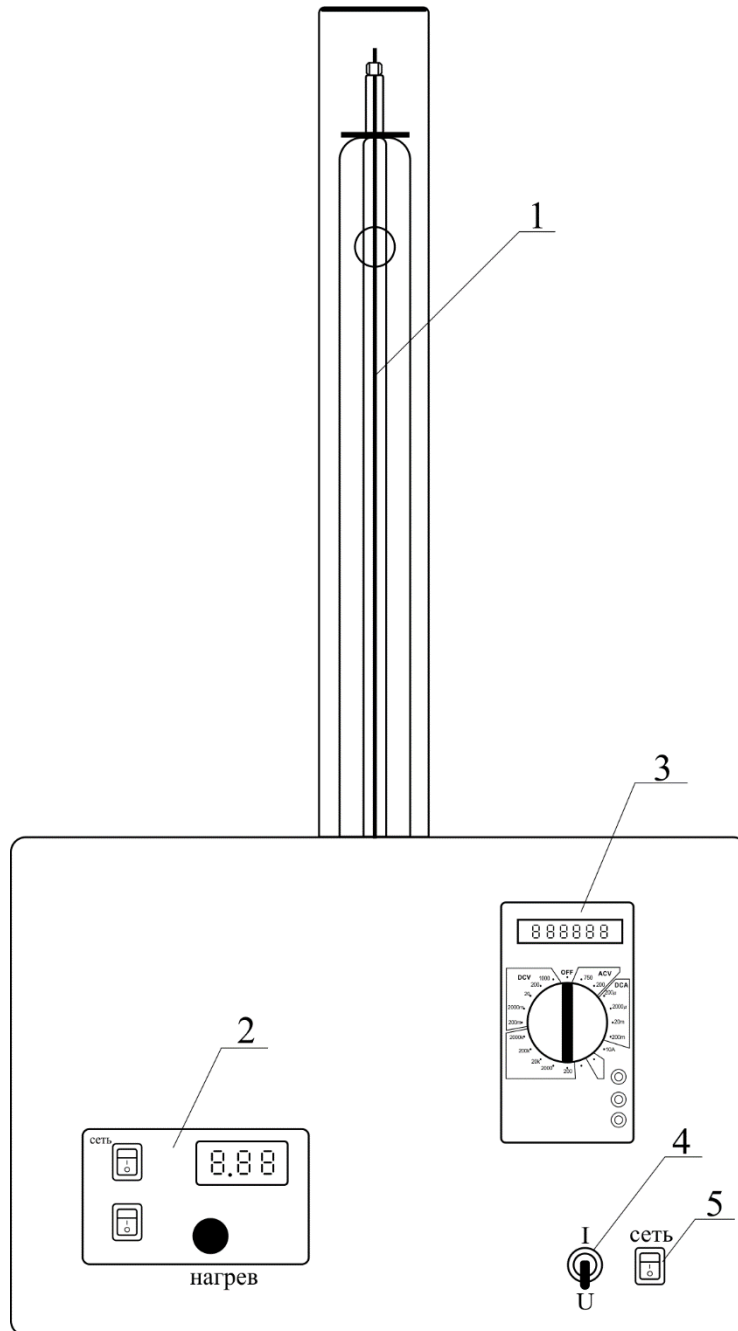


Рис. 32

Установка для изучения теплопроводности воздуха выполнена в виде моноблока (рис. 32). На корпусе установки расположен стеклянный

баллон термостата 1 с вольфрамовой нитью. На передней панели размещены источник питания 2 и мультиметр 3, тумблер 4 для подключения мультиметра в режиме измерения тока (положение «I») и в режиме измерения напряжения нити (положение «U»), тумблер 5 включения электропитания установки «сеть».

На рис. 33 представлена принципиальная схема экспериментальной установки. В стеклянной цилиндрической трубе, окружённой термостатом 6, находится нагреваемая вольфрамовая проволока-нить 7. Между двойными стенками термостата залита вода. Температура воды в баллоне и, следовательно, температура стенки (T_{cm}) трубки постоянны в течение опыта. Вольфрамовая проволока через соединительные провода подключается к источнику питания постоянного тока БП. Ток в нити определяется по падению напряжения U_o на балластном сопротивлении R_o . Напряжение на нити U_n и падение напряжения на балластном сопротивлении U_o измеряются мультиметром при соответствующем положении тумблера 4: «U» и «I» соответственно. При нагревании нити вдоль радиуса трубки создаётся градиент температуры dT/dr . Площадь, через которую передаётся тепло, равна площади поверхности цилиндра, коаксиального с нагретой нитью: $S = 2\pi rL$, где r – радиус цилиндра, L – его высота.

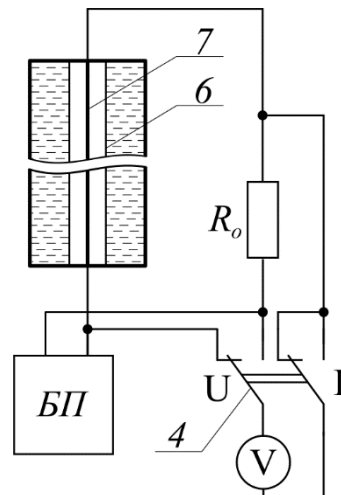


Рис. 33

Для стационарного процесса с учётом цилиндрической симметрии системы на основе выражения для потока тепла (67) можно записать уравнение Фурье:

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dr} dS dt, \quad (108)$$

где dQ – количество теплоты, переносимое за время dt через площадку dS , нормальную к направлению убывания температуры; dT/dr – градиент температуры в радиальном направлении.

Тогда с учётом геометрии экспериментальной установки соотношение (108) принимает вид

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dr} 2\pi r L dt = -\chi \frac{dT}{dr/r} 2\pi L dt. \quad (109)$$

Заменяя $dr/r = d(\ln r)$, преобразуем (109) в формулу для мощности теплового потока через поверхность цилиндра:

$$q = \frac{dQ}{dt} = -\chi(r) \frac{dT}{d(\ln r)} 2\pi L. \quad (110)$$

Обозначением $\chi(r)$ подчеркнут тот факт, что коэффициент теплопроводности зависит от r . Вместо $\chi(r)$ берём усреднённое по радиусу r значение коэффициента теплопроводности воздуха $\langle\chi\rangle$, находящегося между нитью и внутренней поверхностью трубки, и решаем полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} q \int_{\ln r_1}^{\ln r_2} d(\ln r) &= -2\pi L \langle\chi\rangle \int_{T_n}^{T_{cm}} dT; \\ \Downarrow \\ q &= -2\pi L \langle\chi\rangle \frac{T_n - T_{cm}}{\ln(r_2/r_1)}, \end{aligned} \quad (111)$$

где r_1 – радиус нити 7; r_2 – радиус трубки 6; T_{cm} – температура стенки трубки; T_n – температура нити.

Эксперимент проводится при постоянной температуре трубки 6, равной T_{cm} . Увеличение электрической мощности P , выделяемой в нити, приводит к увеличению мощности теплового потока: $dq = dP$; при этом температура нити возрастает на величину dT_n . Из формулы (111) при условии постоянства температуры трубки с водой 6 и температуры T_{cm} следует, что

$$dq = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \chi(T_n) dT_n. \quad (112)$$

Так как вблизи нити теплопроводность воздуха определяется температурой T_n , то в (112) значение $\chi(T_n)$ относится к этой температуре. При возрастании температуры нити на dT_n дополнительный перенос тепловой мощности dP от нити к стенке трубки определяется только теплопроводностью слоя воздуха вблизи нити.

Из соотношения (112) получаем:

$$\chi(T_n) = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L} \frac{dP}{dT_n}. \quad (113)$$

Для определения производной dP/dT_n необходимо знать зависимость $P = f(T_n)$, которую находят по экспериментальным данным.

Мощность теплового потока находят по напряжению на нити U_n и току I_n , протекающему через образцовое сопротивление R_o и нить, соединённые последовательно. Для этого на образцовом сопротивлении измеряют напряжение U_o и, зная величину R_o , определяют ток:

$$I_n = \frac{U_o}{R_o}. \quad (114)$$

Тогда мощность находится как

$$P = I_n U_n. \quad (115)$$

Температура нити по абсолютной шкале задаётся соотношением

$$T_n = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{R_n}{R_{cm}} (1 + \alpha t_{cm}) - 1 \right] + 273. \quad (116)$$

Здесь R_{cm} – электрическое сопротивление нити при комнатной температуре; R_n – сопротивление при температуре опыта; α – температурный коэффициент сопротивления материала нити. Температура стенки трубки t_{cm} определяется по термометру, находящемуся в лаборатории.

Сопротивление R_n может быть найдено из соотношения

$$R_n = \frac{U_n}{I_n}. \quad (117)$$

Порядок выполнения работы

1. Включить электропитание экспериментальной установки (рис. 32) тумблером «сеть» (мультиметр включается одновременно).
2. Установить предел измерения напряжений мультиметра 3 «20 В».
3. Выставить минимальное значение напряжения на выходе источника постоянного напряжения 2. Для этого регулятор напряжения необходимо повернуть против часовой стрелки до упора.
4. Переключить тумблер 4 в положение «U» для измерения напряжения на вольфрамовой проволоке.
5. Включить источник постоянного напряжения 2.
6. С помощью регулятора напряжения установить значение напряжения, подаваемого на вольфрамовую проволоку, равным 2 В.
7. По показаниям мультиметра определить напряжение на вольфрамовой проволоке U_n . Результат записать в табл. 1.
8. Переключить тумблер 4 в положение «I» для измерения падения напряжения на балластном сопротивлении, пропорциональном силе тока в цепи вольфрамовой нити.
9. Переключить предел измерения напряжений мультиметра на «2000 mV». Произвести отсчёт падения напряжения на балластном сопротивлении U_o . Результат записать в табл. 1.

10. Переключить предел измерения напряжений мультиметра в положение «20 В». Пункты 6 – 9 повторить для 20 значений напряжения питания, устанавливаемых последовательно, вплоть до 7 В.

11. По формулам (114), (117), (116) и (115) рассчитать значения тока I_n , сопротивления проволоки R_n , её температуру T_n и мощность P , подводимую к ней. Результаты занести в табл. 1.

Таблица 1

№	$U_n, В$	$U_o, В$	$I_n, А$	$R_n, Ом$	$T_n, К$	$P, Вт$
1						
2						
...						
20						

12. Обработка результатов измерений.

а) Путём последовательного численного дифференцирования найти значения производных мощности P по температуре накала нити T_n :

$$\left(\frac{dP}{dT_n} \right)_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{(T_n)_{i+1} - (T_n)_i},$$

где $i \in [1, 19]$ – номер строки данных из таблицы. Записать данные в табл. 2.

Таблица 2

№	dP/dT_n	T_n	χ	$\ln T_n$	$\ln \chi$	$(\ln T_n)^2$	$(\ln \chi)^2$	$(\ln T_n) \cdot (\ln \chi)$
1								
2								
...								
19								
Средние значения				$\langle \ln T_n \rangle$	$\langle \ln \chi \rangle$	$\langle (\ln T_n)^2 \rangle$	$\langle (\ln \chi)^2 \rangle$	$\langle (\ln T_n)(\ln \chi) \rangle$

б) По данным табл. 1 $(T_n)^{(1)}$ рассчитать значения $(T_n)^{(2)}$ для табл. 2

$$(T_n)_i^{(2)} = \frac{(T_n)_{i+1}^{(1)} + (T_n)_i^{(1)}}{2},$$

где $i \in [1, 19]$ – номер строки данных из таблицы. Записать данные в табл. 2.

в) По соотношению (113) рассчитать значения коэффициентов теплопроводности χ . Записать данные в табл. 2.

г) Прологарифмировать значения T_n и χ . Результаты возвести в квадрат $(\ln T_n)^2$, $(\ln \chi)^2$ и перемножить $(\ln T_n) \cdot (\ln \chi)$. Записать полученные данные в табл. 2.

д) Рассчитать значение углового коэффициента зависимости $\ln \chi = f(\ln T_n)$, равного показателю степени b в соотношении (107), константы $const$ в этом же соотношении и оценить их погрешности по методу наименьших квадратов, используя нижеприведённые формулы:

$$\begin{aligned}\langle \ln T_n \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln T_n)_i, \\ \langle \ln \chi \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln \chi)_i, \\ \langle (\ln T_n)^2 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln T_n)_i^2, \\ \langle (\ln \chi)^2 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln \chi)_i^2, \\ \langle (\ln T_n)(\ln \chi) \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(\ln T_n)_i (\ln \chi)_i], \\ b &= \frac{\langle (\ln T_n)(\ln \chi) \rangle}{\langle (\ln T_n)^2 \rangle}, \\ \Delta b &= t_c \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\langle (\ln \chi)^2 \rangle}{\langle (\ln T_n)^2 \rangle} - b^2 \right)}, \\ \delta_b &= \frac{\Delta b}{b} \cdot 100\%, \\ const &= \exp \left[\langle (\ln \chi) \rangle - b \langle (\ln T_n) \rangle \right], \\ \delta_{const} &= \Delta b \sqrt{\langle (\ln T_n)^2 \rangle} \cdot 100\%, \\ \Delta(const) &= \frac{\delta_{const}}{100\%} const.\end{aligned}$$

Используя полученные значения, записать результаты расчётов по представленному ниже образцу.

Расчётная зависимость: $\chi = const \cdot T^b$.

Показатель степени температуры: $b = b \pm \Delta b$, $\delta_b = \dots\%$, $P = 0,95$.

Константа: $const = const \pm (const)$, $\delta_{const} = \dots\%$, $P = 0,95$.

е) Отобразить на *одном графике* экспериментальную и теоретическую зависимости $\ln(\chi) = f(\ln(T_n))$. Данные, полученные экспериментальным путём и представленные в табл. 1, на координатной плоскости отображаются отдельными точками. Расчётная зависимость $\chi = \text{const} \cdot T^b$, представляющая собой в указанных логарифмических координатах прямую зависимость, отображается сплошной линией (рис. 34)

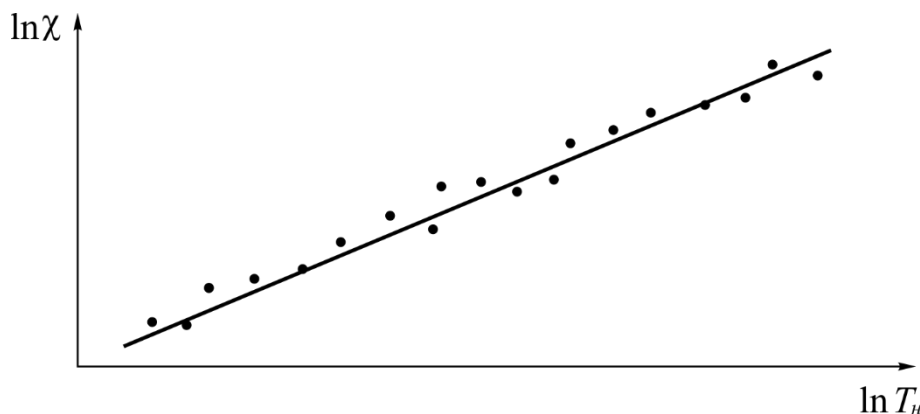


Рис. 34

12. По полученным результатам сформулировать вывод о проделанной работе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения следующих понятий: средняя длина пробега молекулы, эффективный диаметр молекулы, эффективное сечение столкновения, коэффициент вязкости.
2. Перечислите процессы переноса, возникающие в термодинамически неравновесных системах, дайте их краткую характеристику и запишите законы, описывающие эти явления.
3. Охарактеризуйте возможные способы передачи тепла.
4. Какие процессы вносят погрешности в определение коэффициента теплопроводности?
5. Используя полученные в этой работе данные, проведите оценку средней длины свободного пробега молекул воздуха. Сравните полученный результат с известными.
6. Вывести коэффициент теплопроводности на основе молекулярно-кинетической теории.

Библиографический список

1. Измерения массы, плотности и вязкости / В. Я. Кузьмин, С. И. Торопин, Ю. В. Тарбеев и др. – М.: Изд-во стандартов, 1988. – 167 с.
2. Явления переноса / Р. Берт, В. Стюарт, Е. Лайтфут. – М.: Изд-во «Химия», 1974. – 688 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – 15-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2019. – 436 с.
4. Иродов И. Е. Физика макросистем. Основные законы: учеб. пособие / И. Е. Иродов. – 8-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2020. – 210 с.
5. Детлаф А. А. Курс физики: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 9-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 720 с.
6. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 20-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 560 с.

Оглавление

1. Элементы теории. Молекулярная физика	3
1.1. Введение	3
1.2. Вывод основного уравнения МКТ идеального газа	3
1.3. Связь термодинамической температуры и средней кинетической энергии молекул	6
1.4. Распределение Максвелла по скоростям для молекул идеального газа	8
1.5. Следствия из распределения Максвелла по модулю скорости	13
1.5.1. Наиболее вероятная скорость частиц	13
1.5.2. Средняя арифметическая скорость частиц	15
1.5.3. Средняя квадратичная скорость частиц	15
1.5.4. Распределение по кинетическим энергии	16
1.6. Экспериментальное подтверждение реальности существования распределения Максвелла	18
1.6.1. Опыт Отто Штерна (1920)	18
1.6.2. Опыт Бертольда Ламмерта (1929)	24
1.7. Барометрическая формула. Распределение Больцмана	28
1.8. Длина свободного пробега молекул	30
1.9. Явления переноса	34
1.9.1. Диффузия	34
1.9.2. Внутреннее трение	35
1.9.3. Теплопроводность	36
1.9.4. Интерпретация явлений переноса с точки зрения МКТ	37
2. Лабораторный практикум	40
Лабораторная работа 1-8 Изучение сил вязкого трения	40
Лабораторная работа 1-26 Определение вязкости, средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха	46
Лабораторная работа 1-27 Определение теплопроводности воздуха методом нагретой нити	55
Библиографический список	63